

เฉลยชุดข้อสอบ : กลศาสตร์ของไหล ชุดที่ 2

ข้อที่ 1

ตอบ $1 + \frac{d}{h}$

รูป ก) $F_B = m_B g$

ให้พื้นที่หน้าตัดของวัตถุ B = a ระยะวัตถุจม = x

$$D_{น้ำ} a x g = m_B g \dots \dots \dots (1)$$

รูป ข) ระยะวัตถุจม = x + d ให้ V = ปริมาตรของ M
จะได้

$$(M + m_B) g = D_{น้ำ} V g + D_{น้ำ} a (x + d) g \dots \dots \dots (2)$$

รูป ค) ระยะวัตถุจม = x + d + h

$$(M + m_B) g = D_{น้ำ} a (x + d + h) g \dots \dots \dots (3)$$

$$(2) = (3);$$

$$V = ah$$

$$(3) - (1);$$

$$M = D_{น้ำ} a d + D_{น้ำ} a h$$

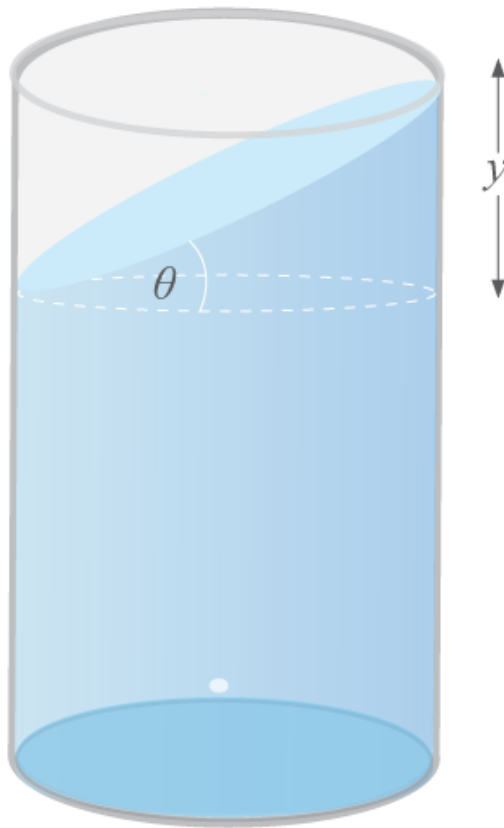
$$M = D_{น้ำ} a (d + h)$$

$$\frac{DM}{D_{น้ำ}} = \frac{M}{VD_{น้ำ}} = \frac{D_{น้ำ} a (d + h)}{ahD_{น้ำ}}$$

ความถ่วงจำเพาะของ M = $\frac{(h + d)}{h} = 1 + \frac{d}{h}$

ข้อที่ 2

ตอบ $\pi R^2 (H - R \tan \theta)$



เมื่อเราเอียงคอดตามถึงน้ำจะเห็นดังรูป โดยที่ผิวน้ำจะทำมุม θ กับแนวระดับสายตา จะได้ว่าปริมาตรน้ำส่วนที่หายไปด้านบน มีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของ ปริมาตรน้ำในทรงกระบอกสูง y ปริมาตรน้ำที่หายไป

$$\delta V = \frac{1}{2} \pi R^2 (2R \tan \theta) = \pi R^3 \tan \theta$$

จะได้ว่ามีน้ำเหลืออยู่

$$\begin{aligned} V_0 - \delta V &= \pi R^2 H - \pi R^3 \tan \theta \\ &= \pi R^2 (H - R \tan \theta) \end{aligned}$$

ข้อที่ 3

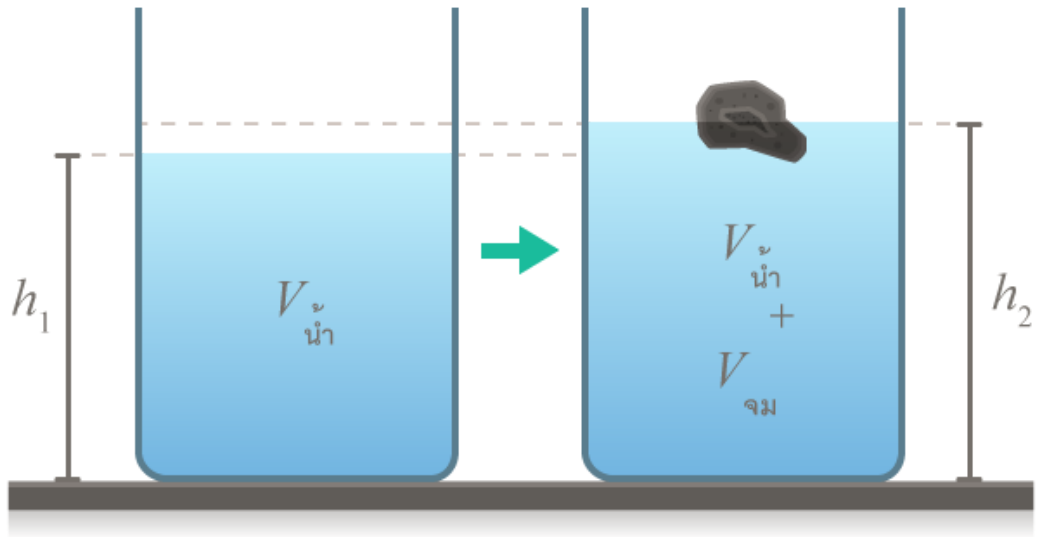
ความดันที่ก้นถังจะต้องสูงขึ้นเพื่อรับน้ำหนักมวล mg เนื่องจากน้ำหนัก mg กระจายไปบนพื้นที่ก้นถัง A

$$\therefore \Delta P = \frac{mg}{A}$$

ΔP ที่เพิ่ม แปลงระดับน้ำ $\rho g \Delta h$

$$\begin{aligned} \frac{mg}{A} &= \rho g \Delta h \\ \Delta h &= \frac{m}{\rho A} \end{aligned}$$

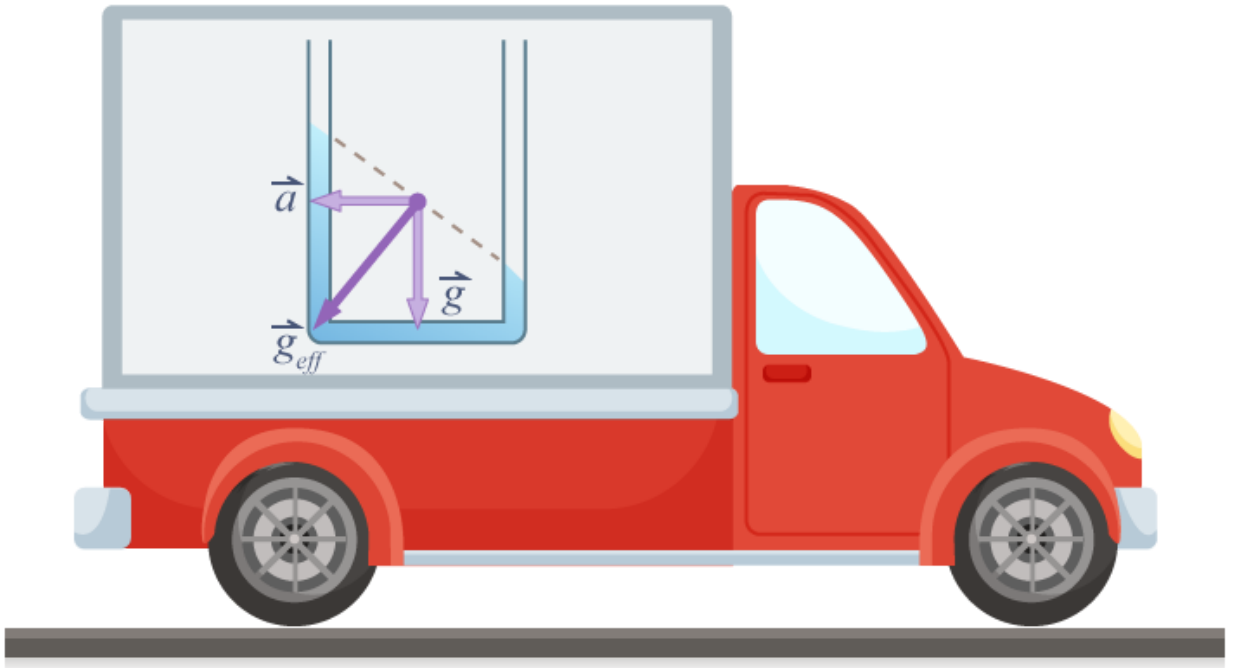
หรือใช้แรงลอยตัว



$$\begin{aligned}
 mg &= \rho V_{\text{จม}} g \\
 V_{\text{จม}} &= \frac{m}{\rho} \\
 h_1 &= \frac{V_{\text{น้ำ}}}{A} \\
 h_2 &= \frac{V_{\text{น้ำ}} + V_{\text{จม}}}{A} \\
 h_2 - h_1 &= \frac{V_{\text{น้ำ}} + V_{\text{จม}}}{A} - \frac{V_{\text{น้ำ}}}{A} \\
 &= \frac{V_{\text{จม}}}{A} \\
 &= \frac{m}{\rho A}
 \end{aligned}$$

ข้อที่ 4

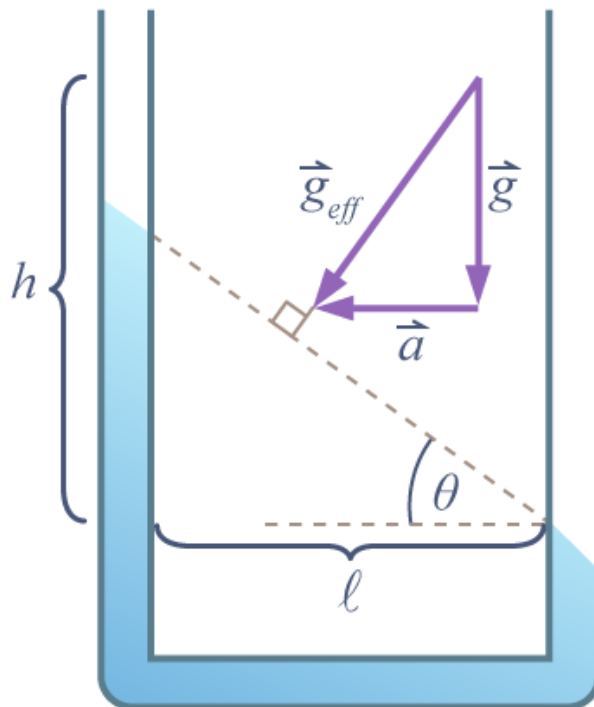
ตอบ $\frac{la}{g}$



กรณีนี้ วิธีที่ง่ายที่สุดคือการนำผู้สังเกตไปนั่งในกรอบอ้างอิงไม่เฉื่อย (ในรถ) จะเห็นแรงโน้มถ่วงเทียม $-\vec{a}$ ทำให้เกิด effective gravity : \vec{g}_{eff}

$$\vec{g}_{eff} = \vec{g} + (-\vec{a})$$

และผิวน้ำจะตั้งฉากกับ \vec{g}_{eff} เสมอ



$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{a}{g} \\ &= \frac{h}{l} \\ h &= \frac{la}{g} \end{aligned}$$

ข้อที่ 5

ตอบ $h_w = 1.632 \text{ m}$

โจทย์กำหนดว่า ใ้เครื่องมือวัดความดันที่บอกความดันด้วยความสูงของปรอท ปรากฏว่า ปรอทขึ้นไปสูง 120 mm จากข้อมูลนี้สามารถหาความดันเลือดได้จาก

$$P = (\rho_{Hg})gh_{Hg}$$

เมื่อ

P เป็นความดันเลือด

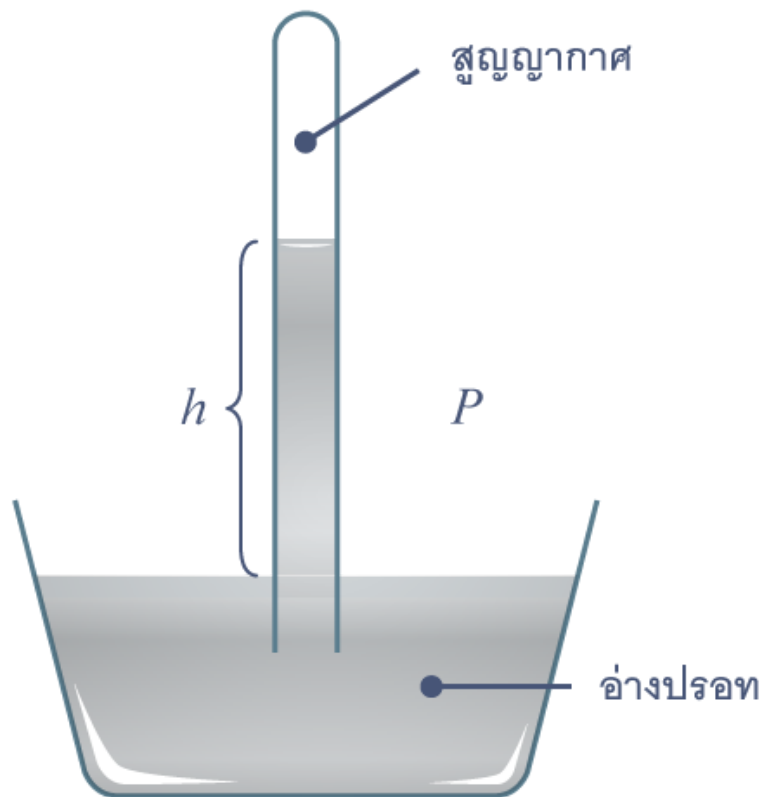
ρ_{Hg} เป็นความหนาแน่นปรอท

g เป็นค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงโลกที่ผิวโลก

h_{Hg} เป็นความสูงของปรอท

ซึ่งถ้าเปลี่ยนปรอทเป็นน้ำ แล้วนำไปวัดความดันเลือด P ดังกล่าว ความสูงของน้ำ h_w จะเปลี่ยนไปดังนี้

$$\begin{aligned} P &= (\rho_{Hg})gh_{Hg} = \rho_w gh_w \\ \therefore (\rho_{Hg})h_{Hg} &= \rho_w h_w \\ h_w &= \frac{\rho_{Hg}h_{Hg}}{\rho_w} \\ &= \frac{(13600 \text{ kg/m}^3)(120 \text{ mm})}{1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3} \\ &= 1.632 \text{ m} \end{aligned}$$



ข้อที่ 6

พิจารณาแรงที่น้ำกระทำต่อลูกบอล

$$F dt = \rho A v dy$$

$$F = \rho A v^2$$

ซึ่งตอนแรก ลูกบอลอยู่ในสมดุล

$$F = mg$$

$$v^2 = \frac{mg}{\rho A}$$

จากสมการการเคลื่อนที่

$$v^2 = u^2 - 2gh$$

$$u^2 = v^2 + 2gh$$

$$u_1^2 = \frac{mg}{\rho A} + 2gh$$

$$u_2^2 = \frac{mg}{\rho A} + 4gh$$

ดังนั้น

$$\frac{u_1}{u_2} = \sqrt{\frac{m + 2\rho Ah}{m + 4\rho Ah}}$$

โจทย์บอกว่าน้ำตกกระทบตั้งฉากกับผิวลูกบอล

จึงไม่ควรมีน้ำไปชนผิวทรงกลมด้านข้าง คือ มันจะเบนออกในแนวระดับหมดเลย ดูจากรูป

โจทย์ยังบอกอีกด้วยว่าเป็นลูกบอลขนาดใหญ่

วิธีทำ

อัตราเร็วที่น้ำกระทบลูกบอลที่ความสูง y ใดๆหาได้จาก $v = \sqrt{u^2 - 2gh}$ และจากสมการความต่อเนื่องได้ว่าพื้นที่ของน้ำตอนกระทบ มีค่า

$$A_1 = \frac{A_u}{\sqrt{u^2 - 2gy}}$$

เราพิจารณาว่าในช่วงเวลา δt ลำนน้ำเสียโมเมนตัมไป $\rho A_1 v^2 \delta t$ นี้บ่งว่าในช่วงเวลานั้นนี้

บอลออกแรง $\rho A_1 v^2$ ทิศลง กับลำนน้ำส่วนที่ชน

จากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อ 3 เราได้ว่าน้ำออกแรง $\rho A_1 v^2$ ทำกับบอลด้วย ทิศขึ้น

ดังนั้นเมื่อบอลสมดุลเราจะได้ว่า

$$mg = \rho A_1 v^2$$

แทนค่าความเร็วและพื้นที่หน้าตัดตอนกระทบลงไป เราได้ว่า

$$mg = \rho A u \sqrt{u^2 - 2gy}$$

แก้สมการออกมาได้ว่าความเร็วต้นที่ทำให้บอลไปสมดุลที่ความสูง y ใดๆ มีค่าเท่ากับ

$$u(y) = \left[gy + \sqrt{g^2 y^2 + \left(\frac{mg}{\rho A}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

แทน $y = h$ ได้ว่า

$$u(h) = \left[gh + \sqrt{g^2 h^2 + \left(\frac{mg}{\rho A}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

แทน $y = 2h$ ได้ว่า

$$u(2h) = \left[g2h + \sqrt{g^2 (2h)^2 + \left(\frac{mg}{\rho A}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

หาอัตราส่วนระหว่างทั้งสองได้ว่า ต้องเพิ่มความเร็วต้นน้ำให้เป็น

$$\sqrt{\frac{2 + \sqrt{4 + \frac{m^2}{\rho A h}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{m^2}{\rho A h}}}} \text{ เท่าจากเดิม}$$

ลูกบอลจึงจะเลื่อนสูงจากปากท่อเป็น $2h$

ลองคิดที่เวลา Δt เล็กๆ

มวลที่พุ่งชนเป็น $\rho A v \Delta t$ เมื่อ $v = \sqrt{u^2 - 2gh}$ เป็นความเร็ว ณ จุดที่ชน

ดังนั้น โมเมนตัมที่เปลี่ยนไปเป็น $\rho A v^2 \Delta t$

แรงที่กระทำคือโมเมนตัมที่เปลี่ยนไปต่อหน่วยเวลา $f = \rho A v^2 = \rho A (u^2 - 2gh)$ (ทิศขึ้น)

กฎนิวตัน

$$\rho A (u^2 - 2gh) - mg = 0$$

$$u^2 = \frac{mg}{\rho A} + 2gh$$

ข้อที่ 7

หลอดด้วยวัสดุผลต่างความดันที่บริเวณท่อใหญ่กับท่อเล็กกว่ามีค่าเท่ากับ $\rho_2 gh$ ความดันที่ต่างกันนี้เกิดจากอัตราเร็วของเหลวในท่อที่ไหลเร็วไม่เท่ากัน จาก $A_1 v_1 = A_2 v_2$ อัตราเร็วในท่อเล็กจะเป็น 2 เท่าของในท่อใหญ่ $v_2 = 2v_1$ เพราะว่าพื้นที่ตัดขวางเป็น 2 เท่าของท่อเล็ก ($A_2 = 2A_1$) จากกฎของแบร์นูลลี

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho gh_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gh_2$$

เราหาได้ว่า ผลต่างความดันคือ

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho_1 v_2^2 - \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \rho_1 (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \rho_1 (4v_1^2 - v_1^2) = \frac{3}{2} \rho_1 v_1^2$$

โดยที่เราประมาณว่าสายกระแสที่ผ่านท่อใหญ่และท่อเล็กอยู่ในระดับเดียวกันเมื่อเทียบผลต่างความดันที่หาได้จากสองวิธี เราจะได้ว่า

$$\rho_2 gh = \frac{3}{2} \rho_1 v_1^2 \Rightarrow h = \frac{3}{2} \frac{\rho_1 v_1^2}{\rho_2 g}$$

ข้อที่ 8

เฮลิคอปเตอร์เป่าอากาศลงมาทำให้อากาศมีพลังงานจลน์เปลี่ยนไป พลังงานที่เฮลิคอปเตอร์ให้ต่ออากาศต่อหนึ่งหน่วยเวลาคือกำลังที่ต้องการ เฮลิคอปเตอร์ต้องออกแรงเป่าอากาศลงมาเพื่อให้อากาศออกแรงกระทำต่อ เฮลิคอปเตอร์เท่ากับน้ำหนักเฮลิคอปเตอร์ เฮลิคอปเตอร์ทำให้อากาศซึ่งเดิมอยู่นิ่งมีโมเมนตัมเปลี่ยนไป โมเมนตัมของอากาศที่เปลี่ยนไปในหนึ่งหน่วยเวลามีค่าเท่ากับแรงสุทธิที่กระทำ ต่ออากาศ

เราจะสมมติว่าในเวลา Δt ล้น ๆ ความเร็วของอากาศใต้ปีกเปลี่ยนจากศูนย์ไปเป็น v เท่ากันหมด ในช่วงเวลานี้อากาศใต้ปีกเฮลิคอปเตอร์ถูกเป่าลงมาเป็นระยะทาง $v\Delta t$ และดังนั้นปริมาตรของอากาศที่ถูกเป่าลงมาเป็น $v\Delta t\pi r^2$ อากาศปริมาตรนี้มีมวล $\rho v\Delta t\pi r^2$

เพราะฉะนั้นในเวลา Δt โมเมนตัมของอากาศเปลี่ยนไป $\rho v^2 \Delta t\pi r^2$ แรงที่เฮลิคอปเตอร์กระทำต่ออากาศจึงมีขนาดเท่ากับ $\rho v^2 \Delta t\pi r^2 / \Delta t$ แรงนี้มีขนาดเท่ากับแรงที่อากาศกระทำต่อ เฮลิคอปเตอร์และต้องมีขนาดเท่า กับน้ำหนักของเฮลิคอปเตอร์

$$\rho v^2 \pi r^2 = mg$$

$$\text{ดังนั้นเฮลิคอปเตอร์ต้องเป่าลมลงมาด้วยอัตราเร็ว } v = \sqrt{\frac{mg}{\rho\pi r^2}}$$

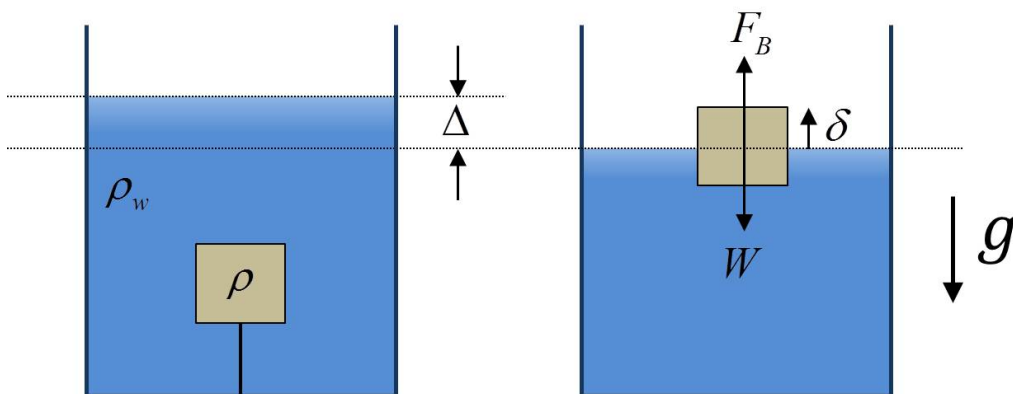
พลังงานจลน์มีมวลอากาศได้รับต่อหนึ่งหน่วยเวลามีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\rho v \Delta t \pi r^2}{\Delta t} v^2 &= \frac{1}{2} \rho v^2 \pi r^2 \left(\frac{mg}{\rho\pi r^2} \right)^{3/2} = \frac{1}{2} mg \left(\frac{mg}{\rho\pi r^2} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \times 500 \times 9.8 \left(\frac{500 \times 9.8}{1.29 \times \pi \times (2.5)^2} \right)^{1/2} \text{ J/s} \\ &= 34 \times 10^3 \text{ W} \end{aligned}$$

ดังนั้น กำลังที่เฮลิคอปเตอร์ต้องใช้คือ $34 \times 10^3 \text{ W}$

ข้อที่ 9

$$\text{ตอบ } \left(\frac{d^3}{A - d^2} \right) \left(1 - \frac{\rho}{\rho_w} \right)$$



สมมติว่าหลังจากเชือกขาดไปแล้ว วัตถุลอยอยู่น้ำ δ และระดับน้ำลดลงมา Δ ดังรูป (น้ำลดลงเพราะเนื้อวัตถุที่แทนที่น้ำได้ลอยขึ้น แล้วน้ำก็ไหลเข้ามาแทนที่บริเวณนั้น ๆ จึงทำให้ความสูงของน้ำลดลง) เนื่องจากวัตถุลอยอยู่นิ่ง ๆ ดังนั้น แรงลอยตัว (F_b) สมดุลกับน้ำหนัก (mg) ดังนั้น

$$\begin{aligned} F_b &= mg \\ \rho_w d^2 (d - \delta) g &= \rho d^3 g \\ \delta &= d \left(1 - \frac{\rho}{\rho_w} \right) \end{aligned}$$

ปริมาตรของวัตถุส่วนที่ลอยนี้จะต้องเท่ากับปริมาตรของน้ำที่ไหลเข้ามาแทนที่ซึ่งทำให้ระดับน้ำลดลง Δ ดังนั้น

$$d^2 \delta = \Delta(A - d^2)$$

ดังนั้น น้ำจะลดระดับลงไป

$$\Delta = \left(\frac{d^3}{A - d^2} \right) \left(1 - \frac{\rho}{\rho_w} \right)$$