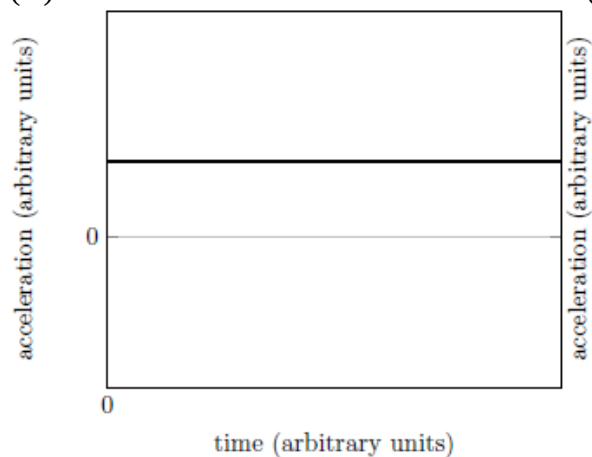


ข้อสอบ $F = ma$ สำหรับการคัดเลือกรอบแรกโครงการฟิสิกส์โอลิมปิกประเทศสหรัฐอเมริกา และเป็นลิขสิทธิ์ของสมาพันธ์ครูฟิสิกส์แห่งสหรัฐอเมริกา สมาคมฟิสิกส์ไทยได้รับอนุญาตให้แปลและเผยแพร่แก่บุคคลทั่วไปได้โดยไม่มีค่าใช้จ่าย

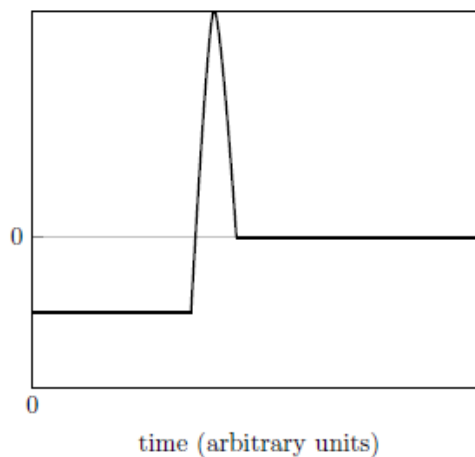
ห้ามนำส่วนหนึ่งส่วนใดในข้อสอบหรือเฉลย ไม่ว่าหน้าใดหน้าหนึ่งหรือทั้งหมด ไปทำซ้ำหรือดัดแปลง เพื่อประโยชน์ในเชิงพาณิชย์ใดๆ โดยไม่ได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากเจ้าของลิขสิทธิ์

1. ถ้าก้อนดินขนาดใหญ่หล่นออกจากกำแพงลงสู่พื้นดิน แล้วกราฟข้อใด แสดงความเร่งที่จุดศูนย์กลางมวลของก้อนดินกับเวลา ได้ดีที่สุด

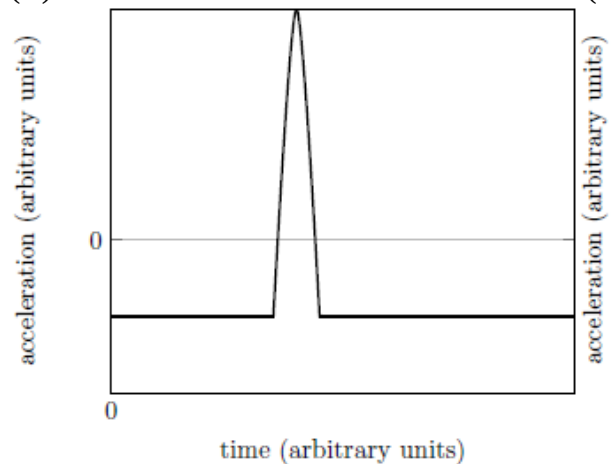
(A)



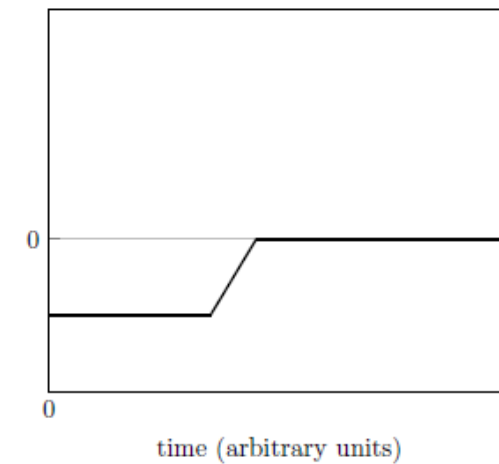
(B)



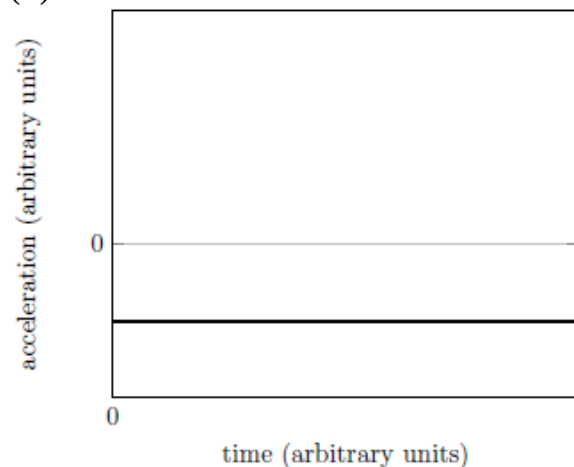
(C)



(D)



(E)



ตอบ (B)

ในการตกอย่างอิสระ ความเร่งจะเป็นค่าคงที่และมีค่าประมาณ -10m/s^2 ทิศลง หลังจากนั้นจะมีแรงดันจากพื้น ทำให้มีความเร่งในทิศขึ้น แรงดันจะมีค่าสูงสุดค่าหนึ่ง แล้วลดลงจนเป็นศูนย์ เมื่อก้อนดินหยุดนิ่ง

2. บล็อกสม่ำเสมอมวล 10 kg เดิมอยู่นิ่งถูกปล่อยลงมาจากพื้นเอียงที่มีความยาว 10 m เอียง 30° และเคลื่อนที่ลงมาจนถึงด้านล่าง ถ้าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสถิตและแรงเสียดทานจลน์เท่ากับ $\mu_s = \mu_k = 0.1$ พลังงานที่สูญเสียไปกับแรงเสียดทานเท่ากับข้อใด

- (A) 0 J
- (B) 22 J
- (C) 43 J
- (D) 87 J
- (E) 164 J

ตอบ (D)

แรงตั้งฉากที่เกิดขึ้นจะเท่ากับ $100(\sqrt{3}/2)$ N ดังนั้น แรงเสียดทานจะเท่ากับ $5\sqrt{3}$ N เมื่อกระทำเป็นระยะ 10 m พลังงานจะสูญเสียไปจะเท่ากับ $50\sqrt{3}$ J มีค่าประมาณ 87 J

3. มวล 3.0 kg เคลื่อนที่ 40 m/s ไปทางขวาเกิดการพุ่งชนแล้วติดไปกับมวล 2.0 kg ที่กำลังเคลื่อนที่ไปทางขวา 20 m/s หลังเกิดการชน พลังงานจลน์ของระบบเท่ากับข้อใด หลังการชน

- (A) 600 J
- (B) 1200 J
- (C) 2600 J
- (D) 2800 J
- (E) 3400 J

ตอบ (C)

ใช้กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม จะได้ความเร็วต้นที่จุดศูนย์กลางมวลเท่ากับ $(3 \cdot 40 + 2 \cdot 20) / 5 = 32$ m/s หลังการชน

ดังนั้น พลังงานจลน์จะเท่ากับ $\frac{m_{\text{tot}} V^2}{2} \approx 2600$ J

4. ให้ลูกบาสที่เดิมอยู่นิ่งถูกปล่อยลงมากระทบพื้น ถ้าพิจารณาเฉพาะลูกบาสในช่วงก่อนและหลังกระทบพื้น แล้วข้อความใดต่อไปนี้เป็นจริง

- (A) โมเมนตัม และพลังงานสุทธิของลูกบาสจะถูกอนุรักษ์ไว้
- (B) โมเมนตัมของลูกบาสจะถูกอนุรักษ์ไว้ แต่พลังงานจลน์ไม่ถูกอนุรักษ์ไว้
- (C) พลังงานสุทธิของลูกบาสจะถูกอนุรักษ์ไว้ แต่โมเมนตัมไม่ถูกอนุรักษ์ไว้
- (D) พลังงานจลน์ของลูกบาสจะถูกอนุรักษ์ไว้ แต่โมเมนตัมไม่ถูกอนุรักษ์ไว้
- (E) พลังงานจลน์ และโมเมนตัมของลูกบาสไม่ได้ถูกอนุรักษ์ไว้

ตอบ (E)

โมเมนตัมของลูกบาสไม่ถูกอนุรักษ์ไว้ เพราะมีแรงภายนอกจากพื้นดินมากระทำ

พลังงานจลน์ไม่ถูกอนุรักษ์ไว้ เพราะมีการเปลี่ยนพลังงานบางส่วนเป็นคลื่นเสียง เป็นการสัมผัสกับพื้น ฯลฯ

5. ฮาร์ดดิสก์ในคอมพิวเตอร์จะหมุนถึงอัตราเร็วที่ต้องการภายใน 10 รอบ แต่เมื่อปิดเครื่องมันจะหมุนได้ถึง 50 รอบ ก่อนหยุดลง สมมติว่า ฮาร์ดดิสก์มีความเร่งเชิงมุม α_1 ในช่วงแรก และช่วงการชะลอมีความเร่งเชิงมุม α_2 แล้วอัตราส่วน α_1 / α_2 เท่ากับข้อใด

- (A) $1/5$
- (B) $1/\sqrt{5}$
- (C) $\sqrt{5}$
- (D) 5
- (E) 25

ตอบ (D)

ให้ ω_0 คือ ความเร็วที่ต้องการ

เมื่อ $\omega_f^2 - \omega_i^2 = 2\alpha\theta$ โดยในช่วงแรก $\omega_i = 0$, $\omega_f = \omega_0$ และในช่วงหลัง $\omega_i = \omega_0$, $\omega_f = 0$

แล้วค่าของ $\alpha\theta$ จะเท่ากันทั้งสองกรณี ดังนั้น ความเร่งที่ได้จะมีค่าเป็นสัดส่วนห่าเท่า

6. คานเบายาว L ถูกตรึงด้านหนึ่งไว้ และมีแรงกด F กระทำที่ปลายคานด้านที่ไม่ถูกตรึง จนคานยุบลงเป็นระยะ x โดยที่ระยะที่ยุบลงเป็น x นี้แปรผันตรงกับขนาดของ F และเป็นสัดส่วนผกผันกับโมเมนต์ดัดขวาง I ซึ่งมีหน่วย m^4 การยุบนี้ยังขึ้นอยู่กับมอดุลัสของยัง E ซึ่งมีหน่วย N/m^2 แล้ว x จะแปรผันตรงกับ L อย่างไร

- (A) $x \propto \sqrt{L}$
- (B) $x \propto L$
- (C) $x \propto L^2$
- (D) $x \propto L^3$
- (E) $x \propto L^4$

ตอบ (D)

ใช้การวิเคราะห์หน่วย โดยสมมติว่า $x \propto F^a E^b I^c L^d$

จะได้ $a = 1, b = -1, c = -1$ และ $d = 3$ ซึ่งจะทำให้ x มีหน่วยเป็น m

ดังนั้น $x \propto L^3$

7. ให้ลูกตุ้มยาว L แกว่งอยู่ภายในกล่องใบหนึ่ง หากมีคนยกกล่องขึ้นมาแล้วค่อยๆ เขย่าในแนวตั้งด้วยความถี่ ω และให้แอมพลิจูดคงที่ตามช่วงเวลาหนึ่งที่กำหนด แล้วแอมพลิจูดสุดท้ายของลูกตุ้มจะมีค่ามากที่สุด เมื่อ ω เท่ากับข้อใด

(A) $\omega = \sqrt{4g/L}$

(B) $\omega = \sqrt{2g/L}$

(C) $\omega = \sqrt{g/L}$

(D) $\omega = \sqrt{g/4L}$

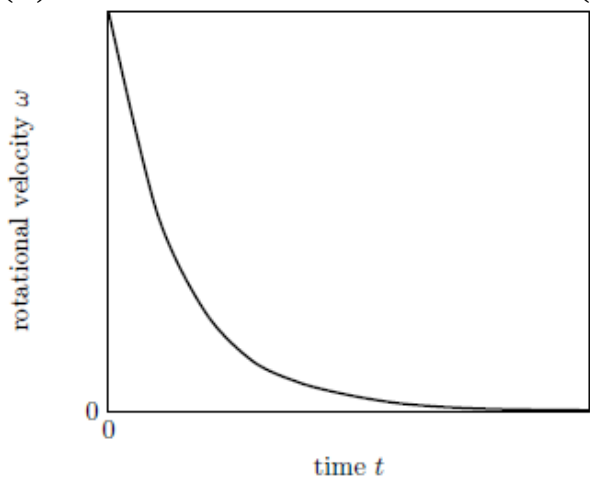
(E) ω ไม่มีผลต่อแอมพลิจูดของลูกตุ้มอย่างมีนัยสำคัญ

ตอบ (A)

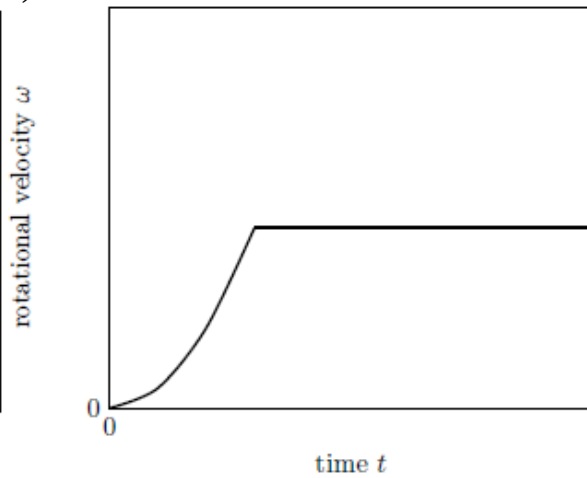
ภายในกล่อง การสั่นตามแนวตั้งจะเท่ากับ g และมีความถี่ในการสั่น ω ในการเพิ่มแอมพลิจูด แรงโน้มถ่วงจะต้องเพิ่มขึ้นขณะลูกตุ้มเคลื่อนที่ลง และน้อยลงขณะลูกตุ้มเคลื่อนที่ขึ้น จึงทำให้เกิดเรโซแนนซ์ (resonance) ดังนั้น การสั่นของลูกตุ้มแต่ละรอบจะต้องเกิดการสั่นของกล่อง 2 รอบ จึงได้ว่า $\omega = 2 \sqrt{g/L}$

8. ให้สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสถิตและแรงเสียดทานจลน์ระหว่างลูกบอลและพื้นเท่ากับ $\mu_s = \mu_k = \mu$ ถ้าตอนเริ่มต้นบอลได้รับอัตราเร็วในแนวนอน โดยไม่มีความเร็วเชิงมุมรอบจุดศูนย์กลางมวล แล้วกราฟในข้อใด แสดงความเร็วเชิงมุมของลูกบอลรอบจุดศูนย์กลางมวลเทียบกับเวลา ได้ดีที่สุด

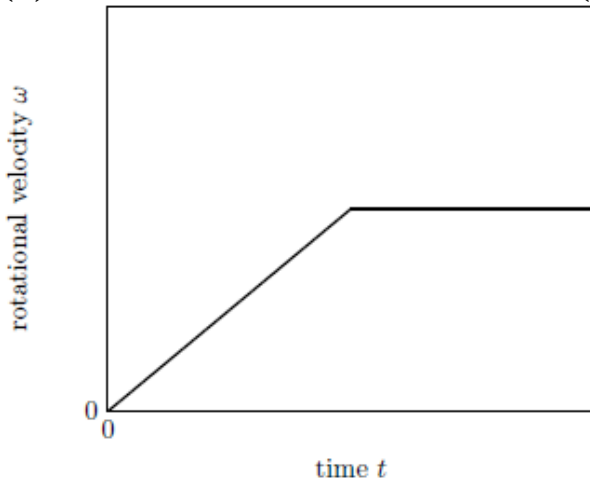
(A)



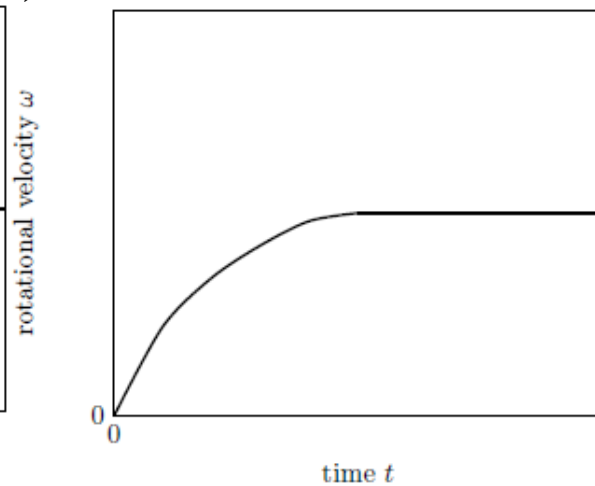
(B)



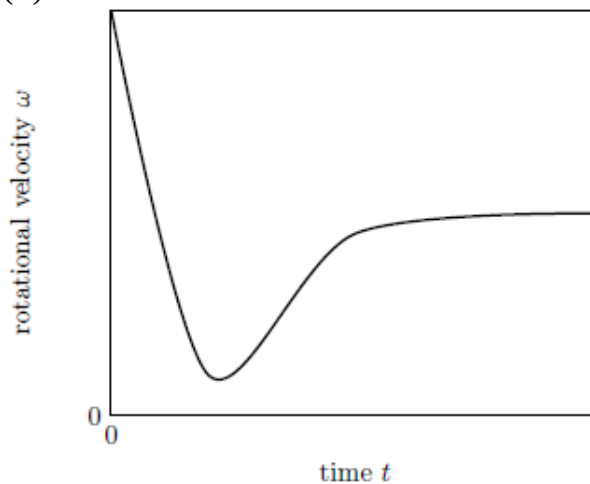
(C)



(D)



(E)



ตอบ (C)

แรงเสียดทานจลน์ μN จะกระทำด้วยทอร์กคงที่ ขณะที่ลูกบอลไถลไปกับพื้น

ดังนั้น ความเร็วเชิงมุมต้นจะเพิ่มขึ้นแบบเป็นเส้นตรง และความเร็วเชิงมุมจะคงที่หลังเกิดการหมุนโดยไม่ไถล

9. บอลมวล 3.0 kg เคลื่อนที่ไปทางทิศตะวันออก 10 m/s แล้วชนแบบยืดหยุ่นกับบอลมวล 2.0 kg ที่กำลังเคลื่อนที่ไปทางทิศตะวันตก 15 m/s แล้วข้อความใดต่อไปนี้เป็นจริง หลังเกิดการชน
- (A) บอลทั้งสองจะพุ่งไปทางทิศตะวันออก
 - (B) บอลมวล 3.0 kg เคลื่อนที่ไปทางทิศตะวันตก 15 m/s
 - (C) บอลมวล 2.0 kg เคลื่อนที่ไปทางทิศเหนือ 10 m/s
 - (D) บอลมวล 3.0 kg หยุดนิ่ง
 - (E) บอลมวล 2.0 kg เคลื่อนที่ไปทางทิศใต้ 15 m/s

ตอบ (E)

เนื่องจากโมเมนตัมสุทธิที่จุดศูนย์กลางมวลต้องมีค่าเป็นศูนย์ ทำให้โมเมนตัมสุดท้ายจะต้องมีค่าเท่ากัน และมีทิศตรงข้าม และเพื่ออนุรักษ์พลังงาน ความเร็วสุดท้ายของแต่ละลูกจะต้องเท่ากับความเร็วต้น ซึ่งข้อที่ครอบคลุมทั้งหมดคือ (E) (ส่วนบอลมวล 3.0 kg จะเคลื่อนที่ไปทางทิศเหนือ 10 m/s หลังการชน)

10. ให้ลูกโป่งที่มีอากาศบรรจุไว้จมลงในน้ำที่ความลึก h และมีแรงลอยตัว B_0 เมื่อลูกโป่งจมลงที่ความลึก $2h$ จะมีแรงลอยตัว B สมมุติว่า น้ำไม่สามารถบีบอัดได้ แต่ลูกโป่งและอากาศสามารถบีบอัดได้ แล้วแรงลอยตัว B จะเป็นไปตามข้อใด

- (A) $B \geq 2B_0$
- (B) $B_0 < B < 2B_0$
- (C) $B = B_0$
- (D) $B < B_0$
- (E) คำตอบขึ้นกับแรงบีบอัดของลูกโป่งและอากาศ

ตอบ (D)

แรงลอยตัวคือ ρV โดย ρ คือความหนาแน่นของน้ำ และ V คือปริมาตรน้ำจะถูกแทนที่ เนื่องจากน้ำไม่สามารถบีบอัดตัวได้ แสดงว่า ρ จะคงที่ ส่วน V จะลดลง ส่วนลูกโป่งและอากาศนั้นสามารถบีบอัดได้

11. วงเชือกถูกหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω_0 ในอวกาศเคลื่อนตามขวางในเส้นเชือกมีอัตราเร็วเชิงมุม v_0 เมื่อวัดในกรอบอ้างอิงที่หมุนไปพร้อมกับเชือก (เห็นเชือกอยู่นิ่งในกรอบอ้างอิงนี้) ถ้าเพิ่มความเร็วเชิงมุมของเชือกเป็นสองเท่าแล้วอัตราเร็วใหม่ของคลื่นตามขวางที่วัดในกรอบอ้างอิงที่หมุนไปพร้อมกับเชือก (เห็นเชือกอยู่นิ่งในกรอบอ้างอิงนี้) จะเท่ากับข้อใด

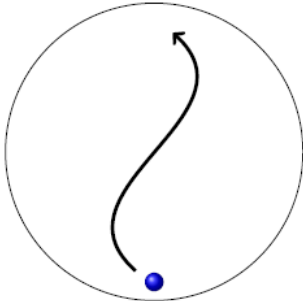
- (A) v_0
- (B) $\sqrt{2}v_0$
- (C) $2v_0$
- (D) $4v_0$
- (E) $8v_0$

ตอบ (C)

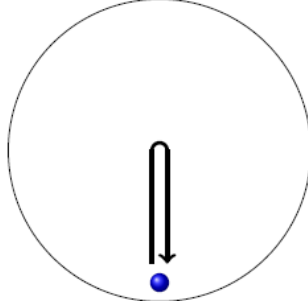
พิจารณาที่ส่วนเล็ก ๆ ของเชือก แรงตึงที่ปลายแต่ละด้านของเชือกจะเข้าสู่ศูนย์กลาง ดังนั้น $T \propto \omega^2$ ทำให้อัตราเร็วคลื่นเท่ากับ $v = \sqrt{T/\mu} \propto \omega$ ซึ่งตรงกับข้อ C

12. ให้เด็กคนหนึ่งยืนอยู่ในสถานีอวกาศวงกลมที่กำลังหมุนอยู่ ถ้าเขาโยนลูกบอลไปในทิศทางหนึ่งขณะสถานีอวกาศกำลังหมุน แล้วลูกบอลย้อนกลับมาหาเขาหลังสถานีอวกาศหมุนไปได้ครึ่งรอบ แล้ววิถีของลูกบอลจากจุดที่เด็กคนนั้นเห็นจะเป็นไปตามข้อใด ให้เด็กยืนอยู่ที่ด้านล่างของสถานีอวกาศ แต่รูปจะแสดงเฉพาะตำแหน่งเริ่มต้นของลูกบอลเท่านั้น

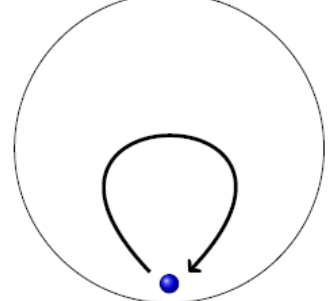
(A)



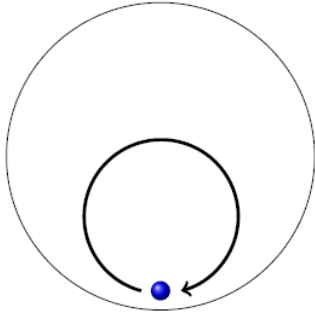
(B)



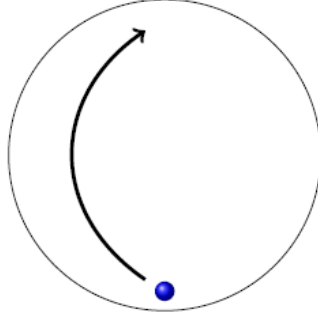
(C)



(D)



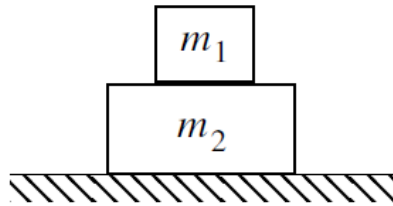
(E)



ตอบ (C)

โจทย์บอกว่าเด็กรับลูกบอลได้ ดังนั้นวิถีของลูกบอลจะต้องเริ่มและสิ้นสุดที่เด็กคนนั้น ทำให้ข้อ A และ E ไม่ใช่คำตอบ เหลือ B, C, D พิจารณาที่ความเร็วของเด็กขณะขว้างลูกบอลออกไป ขณะที่ลูกบอลจะเคลื่อนที่ไปข้างหน้า ตัวเด็กก็จะเคลื่อนที่ไปทางขวา ดังนั้น ในมุมมองของเด็ก ความเร็วสัมพัทธ์จะมีการเคลื่อนที่สองทิศทาง คือ ไปข้างหน้าและไปทางซ้าย จึงตอบข้อ C

13. ให้กล่องสองอัน มีมวล $m_1 = 2.0$ และ $m_2 = 1.0$ วางซ้อนกันบนโต๊ะลื่น ดังรูป ถ้าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสถิตระหว่างกล่องทั้งสองเท่ากับ $\mu_s = 0.20$ แล้วแรงในแนวนอนน้อยสุดที่กระทำกับกล่องด้านล่าง เพื่อให้กล่องด้านล่างไถลไปบนกล่องล่างเท่ากับข้อใด

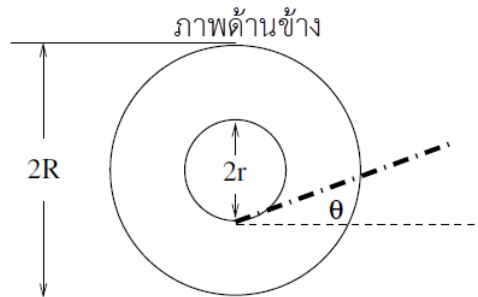


- (A) 4.0 N
- (B) 6.0 N
- (C) 8.0 N
- (D) 12.0 N
- (E) กล่องบนจะไม่มีทางไถลไปบนกล่องล่าง

ตอบ (D)

สมมุติว่า มวล m_1 กำลังจะขยับ แล้วแรงเสียดทานมากที่สุดที่เป็นไปได้จะเท่ากับ 4 N ในขณะที่ m_1 และ m_2 มีความเร่งเท่ากัน จะได้ $F - 4 \text{ N} = 8 \text{ N}$ ดังนั้น $F = 12 \text{ N}$

14. หลอดด้ายทำจากทรงกระบอกและมีแผ่นวงกลมบางๆ ติดหัวท้ายกระบอก ดังรูป ให้ทรงกระบอกมีรัศมี $r = 0.75$ cm แผ่นวงกลมแต่ละวงมีรัศมี $R = 1.00$ cm และมีเชือกพันรอบแกนหลอดด้ายสองสามรอบ แล้วขนาดของ θ ที่ดึงเชือกแล้วหลอดด้ายจะเคลื่อนที่โดยไม่หมุนเท่ากับข้อใด



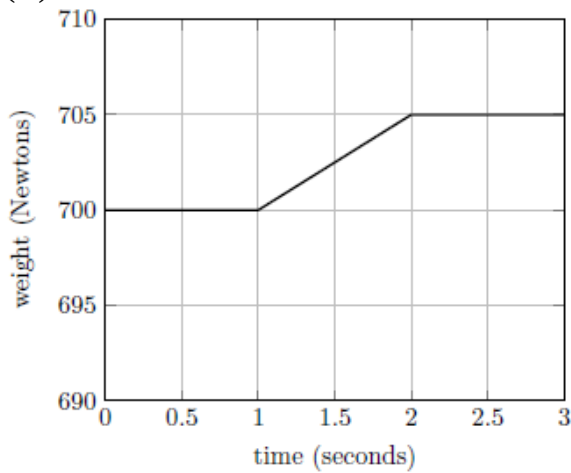
- (A) 31.2°
- (B) 41.4°
- (C) 54.0°
- (D) 60.8°
- (E) 81.5°

ตอบ (B)

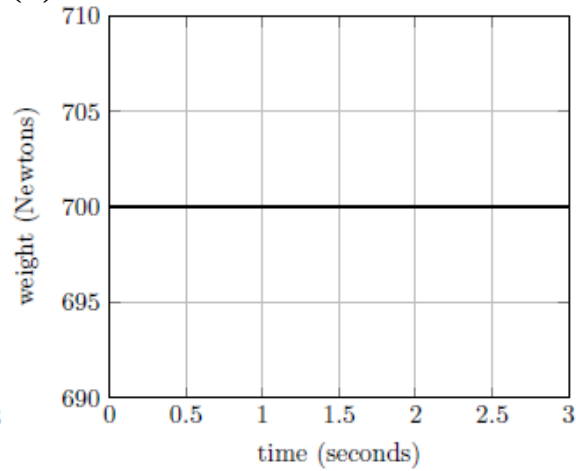
หากไม่ต้องการให้หลอดด้ายกลิ้ง ต้องมีทอร์กเป็นศูนย์ ณ จุดที่หลอดด้ายสัมผัสกับพื้น กรณีนั้นจะเกิดขึ้นเมื่อด้ายอยู่ในแนวที่ตัดกับจุดที่สัมผัสพื้น เมื่อวาดสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ $\sin(90^\circ - \theta) = r / R$ เมื่อแทนค่าจะได้ $\theta = 41.4$ สังเกตว่า การเลือกจุดสัมผัสพื้นเป็นจุดอ้างอิง ทำให้ไม่ต้องคำนึงถึงแรงเสียดทาน

15. ถ้าคุณยืนถือหนังสือฟิสิกส์เล่มใหญ่อยู่บนเครื่องชั่ง แล้วอ่านน้ำหนักได้ 700 นิวตัน ขณะยืนนิ่งอยู่ และที่เวลา $t = 1$ s คุณเริ่มยกหนังสือขึ้น จน $t = 2$ s หนังสืออยู่สูงขึ้นไปครึ่งเมตรแล้วหยุดนิ่งอีกครั้ง แล้วกราฟในข้อใด แสดงน้ำหนักที่อ่านได้เทียบกับเวลาได้ดีที่สุด

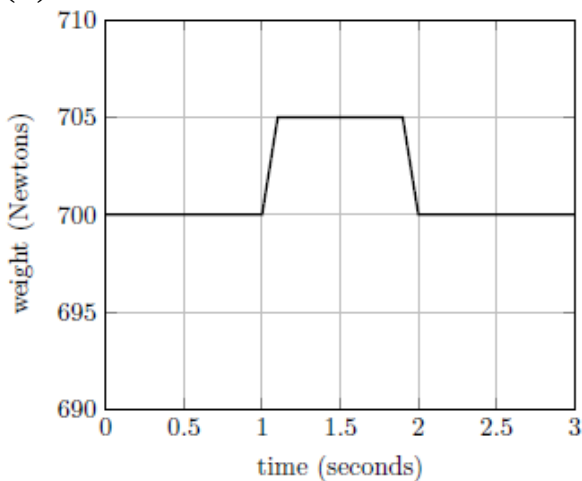
(A)



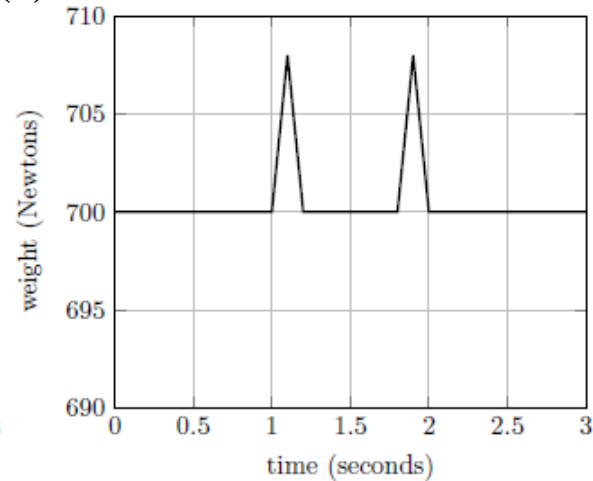
(B)



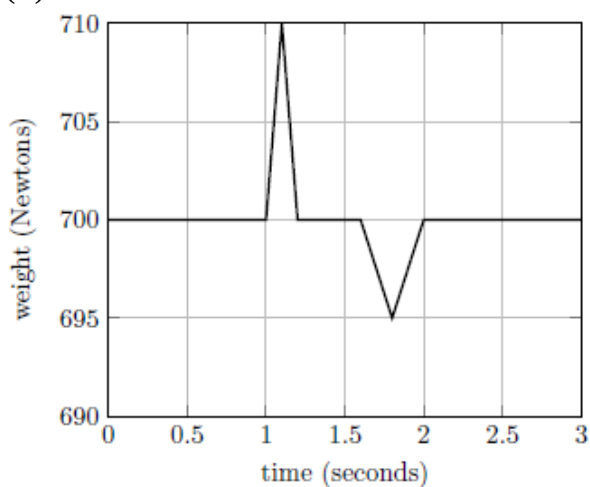
(C)



(D)



(E)



ตอบ (E)

ความเร็วที่จุดศูนย์กลางมวลของคุณและหนังสือไม่ว่าจะก่อนหรือหลังก็จะเท่ากับศูนย์เสมอ ดังนั้น ค่าเฉลี่ยที่อ่านสเกลได้จะต้องเท่ากับ 700 N (ซึ่งรวมกับน้ำหนักด้วย) โดยช่วงต้นค่าจะเพิ่มขึ้น เพราะมีการใส่แรงอย่างฉับพลันบนหนังสือ ทำให้มีแรงจากหนังสือกดลงมา และในช่วงท้ายค่าก็จะลดต่ำลง เพราะความเร็วของหนังสือลดลง

16. เครื่องบินจะบินโดยใช้การเอียงบริเวณขอบส่วนปลายปีกของเครื่องลงด้วยมุมเล็ก ๆ θ เรียกว่า มุมที่สร้างแรงยกตัวขณะออกบิน ถ้าเครื่องบินมีอัตราเร็วบนพื้นดิน v แล้วแรงยกตัวจะแปรผันตาม $v^2 \theta$ และแรงฉุดเพื่อเอาชนะแรงต้านอากาศจะแปรผันตาม v^2

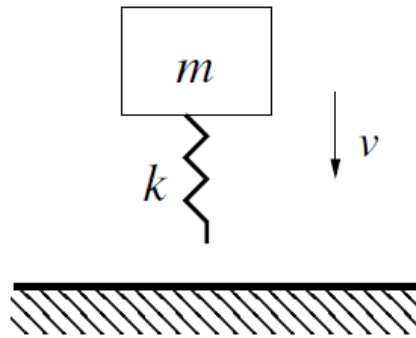
พิจารณาเครื่องบินที่อยู่บนระดับความสูงหนึ่ง และมีอัตราเร็วคงที่ตอนอยู่บนพื้นดิน v ถ้ามีลมพัดจากทางไปยังหัวเครื่องบินด้วยความเร็ว $w < v$ (ขนาดของ w วัดเทียบกับพื้นดิน) (อากาศจะช่วยดันเครื่องบิน ให้บินไปยังทิศที่เราต้องการ) แล้วกำลังของเครื่องยนต์ และมุมที่สร้างแรงยกตัวจะเปลี่ยนไปอย่างไร เพื่อให้ความเร็วของเครื่องบินยังคงบินในแนวระดับด้วยอัตราเร็วเท่าเดิม

- (A) กำลังของเครื่องยนต์จะลดลง และมุมที่สร้างแรงยกตัวจะลดลง
- (B) กำลังของเครื่องยนต์จะลดลง และมุมที่สร้างแรงยกตัวจะเท่าเดิม
- (C) กำลังของเครื่องยนต์จะลดลง และมุมที่สร้างแรงยกตัวจะเพิ่มขึ้น
- (D) กำลังของเครื่องยนต์จะเพิ่มขึ้น และมุมที่สร้างแรงยกตัวจะลดลง
- (E) กำลังของเครื่องยนต์จะเพิ่มขึ้น และมุมที่สร้างแรงยกตัวจะเพิ่มขึ้น

ตอบ (C)

ให้ u เป็นความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างเครื่องบินกับอากาศ หากต้องคงแรงยกไว้ ในกรณีที่ u ลดลง θ ต้องเพิ่มขึ้น ส่วนแรงฉุดนั้นแปรผันกับ u^2 ทำให้กำลังของเครื่องยนต์ที่แปรผันกับ u^3 ต้องลดลง

17. ไม้กระโดดจำลองประกอบด้วยสปริงเบาที่มีค่าคงที่สปริง k ติดที่ด้านล่างของบล็อกมวล m ให้ไม้กระโดดถูกปล่อยลงโดยสปริงจะกระแทกพื้นด้วยอัตราเร็ว v หลังจากการกระแทกแล้ว ส่วนปลายด้านล่างของสปริงจะถูกยึดติดกับพื้น



หลังการกระแทกอัตราเร็วสูงสุดของบล็อกจะเท่ากับข้อใด

- (A) v
- (B) $v + 2mg^2/kv$
- (C) $v + mg^2/kv$
- (D) $\sqrt{v^2 + 2mg^2/k}$
- (E) $\sqrt{v^2 + mg^2/k}$

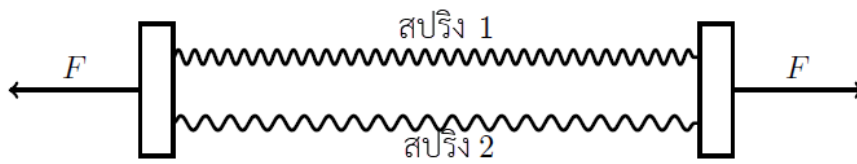
ตอบ (E)

จุดสมดุลอยู่ต่ำกว่าตำแหน่งที่สปริงไม่ยืดไม่หดเท่ากับ Δy

ดังนั้น พลังงานเริ่มต้นจะเท่ากับ $E = mv^2/2 + K(\Delta y)^2/2$ ความเร็วสูงสุดหาจาก $mv_{\max}^2/2 = E$ จะได้

$v_{\max} = \sqrt{v^2 + mg^2/k}$ และมวลจะสั่นรอบจุดสมดุล

18. ให้สปริงที่มีความยาวตามปกติ l_1 มีค่านิจสปริง k_1 วางขนานกับสปริงที่มีความยาวตามปกติ l_2 และมีค่านิจสปริง k_2 และมีแรง F กระทำในแต่ละด้าน



ถ้าเรารวมสปริงทั้งสองให้เสมือนเป็นหนึ่งสปริง และมีค่านิจสปริง k มีความยาวตามปกติ l แล้วข้อความใดต่อไปนี้เป็นจริง

- (A) $k = k_1 + k_2$ และ $l = l_1 l_2 / (l_1 + l_2)$
 (B) $k = k_1 + k_2$ และ $l = (l_1 k_1 + l_2 k_2) / (k_1 + k_2)$
 (C) $k = k_1 + k_2$ และ $l = (l_1 k_2 + l_2 k_1) / (k_1 + k_2)$
 (D) $k = (l_1 k_1 + l_2 k_2) / (l_1 + l_2)$ และ $l = (l_1 k_1 + l_2 k_2) / (k_1 + k_2)$
 (E) $k = (l_2 k_1 + l_1 k_2) / (l_1 + l_2)$ และ $l = (l_1 k_2 + l_2 k_1) / (k_1 + k_2)$

ตอบ (B)

แรงในการคงสภาพเท่ากับ $F = k_1 (x - l_1) + k_2 (x - l_2) = k (x - l)$ จากนั้นหาคำตอบด้วยพีชคณิต

19. (เกินหลักสูตรสอบเข้า สอวน.) ในการทดสอบอัตราเร็วเสียง นักเรียนคนหนึ่งวัดระยะทางที่คลื่นเสียงเดินทางไปได้ 75.0 ± 2.0 cm และใช้เวลาในการเดินทาง 2.15 ± 0.10 ms สมมติว่าความคลาดเคลื่อนมีการกระจายตัวแบบ Gaussian (มีการแจกแจงแบบปกติ) แล้วอัตราเร็วที่คำนวณได้ควรเท่ากับข้อใด

- (A) 348.8 ± 0.5 m/s
- (B) 348.8 ± 0.8 m/s
- (C) 349 ± 8 m/s
- (D) 349 ± 15 m/s
- (E) 349 ± 19 m/s

ตอบ (E)

คำตอบข้อนี้เราจะใช้เศษส่วนความคลาดเคลื่อน (ถ้าต้องการคำอธิบายเพิ่มให้ดูการหา $F = ma$) จาก $v \propto d / t$ เศษส่วนความคลาดเคลื่อนของการวัด หาจาก

$$\sqrt{\left(\frac{2.0}{75.0}\right)^2 + \left(\frac{0.10}{2.15}\right)^2} = 5.4\%$$

แปลงเป็นค่าคลาดเคลื่อนได้ $(0.054)(349\text{m/s}) = 19$ m/s

20. ให้เชือกที่แข็งแรงและสม่ำเสมอ ยาว L วางราบบนโต๊ะที่มีความยาว $L/3$ และมีสัมประสิทธิ์แรงเสียดทาน $\mu_s = 1/7$ โดยทั้งสองด้านของโต๊ะจะมีเชือกยาว $L/3$ เลยออกมาจากโต๊ะเท่ากัน ให้เชือกพาดผ่านขอบโต๊ะที่โค้งและมีความถี่ และไร้แรงเสียดทาน

สมมติว่า เราดึงปลายเชือกด้านหนึ่งที่ห้อยอยู่เป็นระยะ x แล้วปล่อยไว้นิ่งๆ โดยปลายเชือกทั้งสองด้านยังไม่แตะพื้น แล้วค่า x มากสุดที่เชือกจะไม่หล่นลงมาเท่ากับข้อใด

- (A) $L/42$
- (B) $L/21$
- (C) $L/14$
- (D) $2L/21$
- (E) $3L/14$

ตอบ (A)

มีแค่เชือกส่วนที่อยู่บนโต๊ะเท่านั้นที่เกิดแรงเสียดทาน และมวลของเชือกบนโต๊ะเท่ากับเป็น $M/3$ ดังนั้น แรงเสียดทานที่ต้องเอาชนะเท่ากับ

$$f = \mu mg = 1/7(mg/3)$$

ผลต่างระหว่างแรงของเชือกสองด้านที่เลยออกมาจึงเท่ากับ

$$\Delta F = 2x (mg/L)$$

ดังนั้น เงื่อนไขในการไม่หล่นลงมา คือ $\Delta f > f$, หรือ $x > L/42$

21. คานสม่ำเสมอ ยาว L มวล M มีจุดหมุนอยู่ที่ระยะ x ห่างจากศูนย์กลางคาน ถ้าคานที่เดิมอยู่นิ่งถูกปล่อยลงมาจากตำแหน่งในแนวนอน แล้วคาบของการแกว่งจะน้อยสุดเมื่อ x เท่ากับข้อใด

- (A) $x = L/2$
 (B) $x = L/2\sqrt{3}$
 (C) $x = L/4$
 (D) $x = L/4\sqrt{3}$
 (E) $x = L/12$

ตอบ (B)

คานในที่นี้เสมือนเป็นลูกตุ้ม และมีคาบเป็นสัดส่วนกับ $\sqrt{I/Mgx}$ โดย $I = ML^2/12 + Mx^2$ โดยทฤษฎีบทแกนขนาน เราควรเลือก x ที่ทำให้ $(L^2/12 + x^2)/x$ ต่ำสุด เราสามารถหาโดยใช้แคลคูลัสหรือใช้กรณีการเท่ากันใน AM-GM inequality ซึ่งทั้งสองวิธีจะได้ $x = L/2\sqrt{3}$

สำหรับ AM-GM inequality

ให้ $a = L^2/12x$, $b = x$ จะได้ว่า

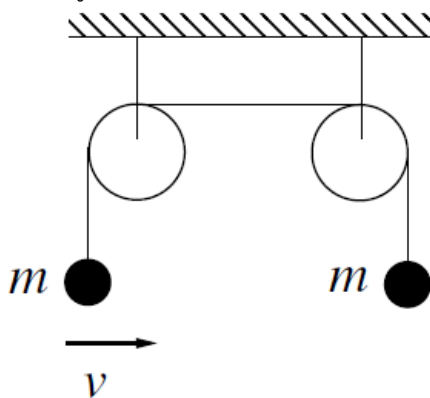
$$\frac{(a+b)}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\frac{L^2}{12x} + x \geq 2\sqrt{\frac{L^2}{12}}$$

และทั้งสองข้างจะเท่ากัน เมื่อ $a = b$ หรือ $x = \sqrt{\frac{L^2}{12}}$

ซึ่งเป็นจุดที่ $\frac{L^2}{12x} + x$ มีค่าน้อยสุด

22. ให้มวล m สองอัน เชื่อมติดกันบนรอก ดังรูป



ถ้ามวลด้านซ้ายได้รับความเร็วเล็กน้อยจนเกิดการสั่นไปด้านหน้าด้านหลังแล้ว มวลด้านขวาจะเป็นไปตามข้อใด

- (A) ยังคงอยู่นิ่ง
- (B) จะสั่นในแนวตั้ง และมีการเคลื่อนที่สุทธิตั้งขึ้น
- (C) จะสั่นในแนวตั้ง และมีการเคลื่อนที่สุทธิในทิศลง
- (D) จะสั่นในแนวตั้ง โดยไม่มีการเคลื่อนที่สุทธิ
- (E) จะสั่นในแนวนอน โดยไม่มีการเคลื่อนที่สุทธิ

ตอบ (B)

มวลที่อยู่ด้านขวาจะสั่นเพราะแรงดึงในเส้นเชือกเกิดการสั่น แต่มันจะไม่สั่นในแนวนอน เพราะ ไม่ทอร์กในแนวนอนนั้น สมมติว่าการสั่นเกิดขึ้นในแนวนอนโดยไม่มีแรงลัพธ์ แล้วค่าเฉลี่ยแรงดึงในแกน y ที่กระทำบนมวลทางด้านซ้ายจะเท่ากับ mg แต่ในทางตรงข้ามแรงดึงบนแกน x จะไม่เท่ากับศูนย์ ทำให้ค่าเฉลี่ยของแรงดึงมีค่ามากกว่า mg ดังนั้น มวลทางขวาจึงสั่นและเคลื่อนที่ขึ้นไปข้างบน

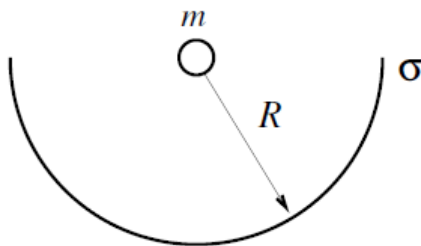
23. ให้มวล m_1 และ m_2 เชื่อมกันด้วยคันแข็งเบายาว L วางราบบนโต๊ะลื่น ที่เวลา $t = 0$ มวลก้อนแรกได้รับแรงดลในทิศตั้งฉากกับคัน จนมีอัตราเร็ว v ในขณะนั้นมวลก้อนที่สองยังคงอยู่นิ่ง แล้วมวลก้อนที่สองจะหยุดนิ่งอีกครั้งตอน t เท่ากับข้อใด

- (A) $t = 2\pi L / v$
 (B) $t = \pi (m_1 + m_2)L / m_2 v$
 (C) $t = 2\pi m_2 L / (m_1 + m_2)v$
 (D) $t = 2\pi m_1 m_2 L / (m_1 + m_2)^2 v$
 (E) $t = 2\pi m_1 L / (m_1 + m_2)v$

ตอบ (A)

ข้อนี้มีสองการเคลื่อนที่ซ้อนทับกันอยู่ มวลทั้งสองเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว $m_1 v / (m_1 + m_2)$ และการเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุดศูนย์กลางมวล โดยอัตราเร็วของมวลก้อนแรกเท่ากับ $m_2 v / (m_1 + m_2)$ แล้วมวลก้อนที่สองหยุดนิ่งอีกครั้งหลังวนเป็นวงกลมครบหนึ่งรอบ รัศมีวงกลมของมวลก้อนแรก (เมื่อมองจากจุดศูนย์กลางมวล) เท่ากับ $L m_2 / (m_1 + m_2)$ จะมีคาบ $t = 2\pi L / v$ หรือคิดจากรัศมีและมวลของก้อนที่สองก็ได้เช่นกัน

24. มวล m ถูกวางที่จุดศูนย์กลางของครึ่งทรงกลมบางที่มีรัศมี R และมีมวลหนาแน่น σ โดย σ มีหน่วย kg/m^2



แล้วแรงโน้มถ่วงจากครึ่งทรงกลมบางที่กระทำกับมวล m เท่ากับข้อใด

- (A) $(1/3) (\pi G m \sigma)$
- (B) $(2/3) (\pi G m \sigma)$
- (C) $(1/\sqrt{2}) (\pi G m \sigma)$
- (D) $(3/4) (\pi G m \sigma)$
- (E) $\pi G m \sigma$

ตอบ (E)

เราจะใช้กฎข้อที่สามของนิวตันในการหาแรง โดยแรงจากทรงกลมต่อ m จะเท่ากับแรงจาก m ที่กระทำต่อทรงกลม
พิจารณาส่วนเล็กๆ ของทรงกลม เนื่องจากความดันจากแรงที่กระทำบนพื้นที่เล็กๆ เท่ากับ $P = G m \sigma / R^2$ ซึ่ง
เท่ากันทุกส่วนของทรงกลม เราจึงสามารถพิจารณาเสมือนทรงกลมบรรจุแก๊สที่มีความดัน P เนื่องจากครึ่งวงกลมไม่
สามารถขยับเองได้ แรงลัพธ์บนทรงกลมจึงเท่ากับ $\pi R^2 P$ (คิดจากprojected area) ดังนั้นแรงที่กระทำบนมวล m
เท่ากับ $\pi (G m \sigma)$

25. (เกินหลักสูตรสอบเข้า สอวน. ค่าย 1) นักเรียนพยามวัดพื้นผิวของท่อทรงกระบอกที่ทำจากลวด ถ้านักเรียนวัดรัศมีของท่อได้ 1.0 ± 0.1 cm โดยใช้

ไม้บรรทัด และวัดความยาวท่อได้ 1.00 ± 0.01 m โดยใช้ไม้เมตร หากต้องการให้ผลลัพธ์แม่นยำขึ้น เราสามารถทำได้หลายวิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 : เปลี่ยนจากไม้บรรทัด เป็น คาลิปเปอร์ ที่มีความคลาดเคลื่อน 0.01 cm

วิธีที่ 2 : เปลี่ยนจากไม้เมตร เป็น ตลับเมตร ที่มีความคลาดเคลื่อน 0.001 m

วิธีที่ 3 : วัดใหม่ โดยแยกเป็นสิบครั้งแล้วหาค่าเฉลี่ยของผลลัพธ์

ข้อใดเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของแต่ละวิธีได้ถูกต้องที่สุด

- (A) วิธีที่ 3 มีความคลาดเคลื่อนต่ำที่สุด ในขณะที่วิธีที่ 1 และ 2 มีความคลาดเคลื่อนเท่ากัน
- (B) วิธีที่ 3 มีความคลาดเคลื่อนสูงที่สุด ในขณะที่วิธีที่ 1 และ 2 มีความคลาดเคลื่อนเท่ากัน
- (C) วิธีที่ 1 มีความคลาดเคลื่อนสูงที่สุด และวิธีที่ 2 มีความคลาดเคลื่อนต่ำที่สุด
- (D) วิธีที่ 2 มีความคลาดเคลื่อนสูงที่สุด และวิธีที่ 1 มีความคลาดเคลื่อนต่ำที่สุด
- (E) วิธีที่ 2 มีความคลาดเคลื่อนสูงที่สุด และวิธีที่ 3 มีความคลาดเคลื่อนต่ำที่สุด

ตอบ (D)

คำตอบข้อนี้เราจะใช้เศษส่วนความคลาดเคลื่อน (ถ้าต้องการคำอธิบายเพิ่มให้ดูการหา $F = ma$) ตามกฎที่อธิบายไว้ที่ เศษส่วนความคลาดเคลื่อนของค่าเฉลี่ยของการทดลอง N ที่เป็นอิสระ คือ จะถูกลดลงโดย $1 / \sqrt{N}$ พื้นที่ผิวหาจากรัศมีคูณความยาว ดังนั้น เศษส่วนความคลาดเคลื่อนที่จะถูกเพิ่มเข้าไปในแต่ละวิธีจะได้ดังนี้

$$\text{วิธีที่ 1: } \sqrt{(1\%)^2 + (1\%)^2} \approx 1.4\%$$

$$\text{วิธีที่ 2: } \sqrt{(0.1\%)^2 + (10\%)^2} \approx 10\%$$

$$\text{วิธีที่ 3: } \sqrt{(1\%)^2 + (10\%)^2} / 10 \approx 3.3\%$$

ดังนั้น วิธีที่ 2 มีความคลาดเคลื่อนสูงที่สุด และวิธีที่ 1 มีความคลาดเคลื่อนต่ำที่สุด