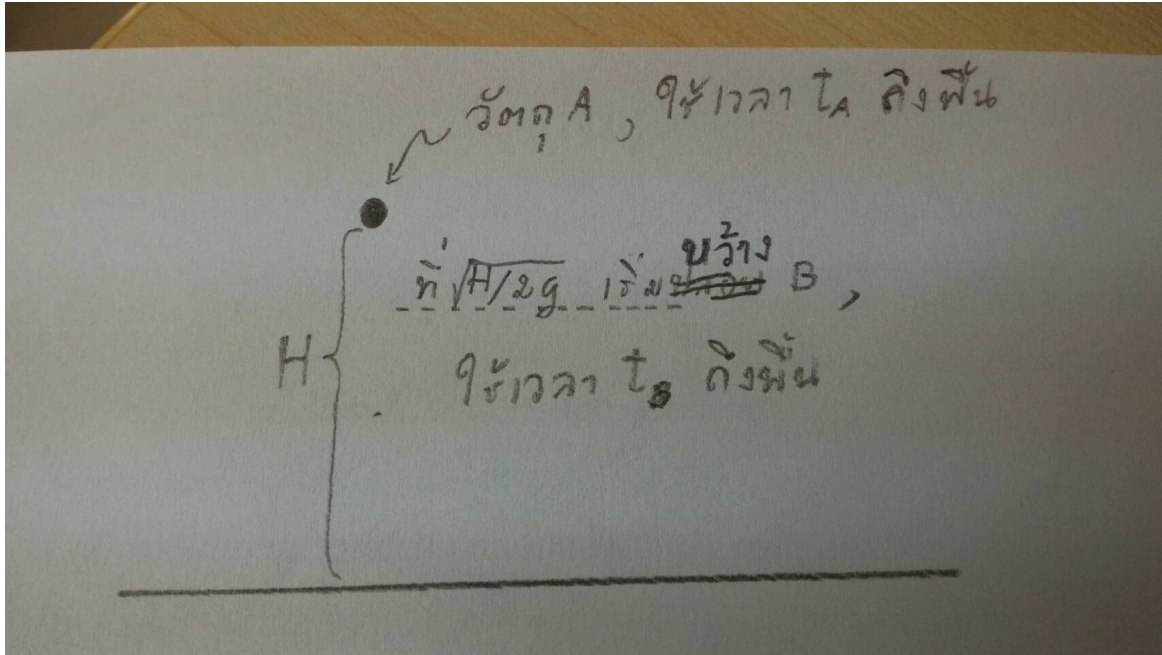


เฉลยชุดข้อสอบ : จลศาสตร์ในหนึ่งมิติและสองมิติ ชุดที่ 2

ข้อที่ 1

ตอบ $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2gH}{3}}$



(จากรูป) เวลาที่วัตถุ A ใช้ในการเคลื่อนที่ถึงพื้นหาได้จาก

$$H = 0 + \frac{1}{2}g(t_A)^2$$
$$t_A = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

หลังจากที่เวลาผ่านไป $\sqrt{\frac{H}{2g}}$ เริ่มขว้าง B และใช้เวลา t_B เคลื่อนที่จนถึงพื้นพร้อม A ดังนั้นเขียนสมการได้ว่า

$$\sqrt{\frac{H}{2g}} + t_B = t_A$$
$$t_B = t_A - \sqrt{\frac{H}{2g}}$$
$$= \sqrt{\frac{3H}{2g}}$$

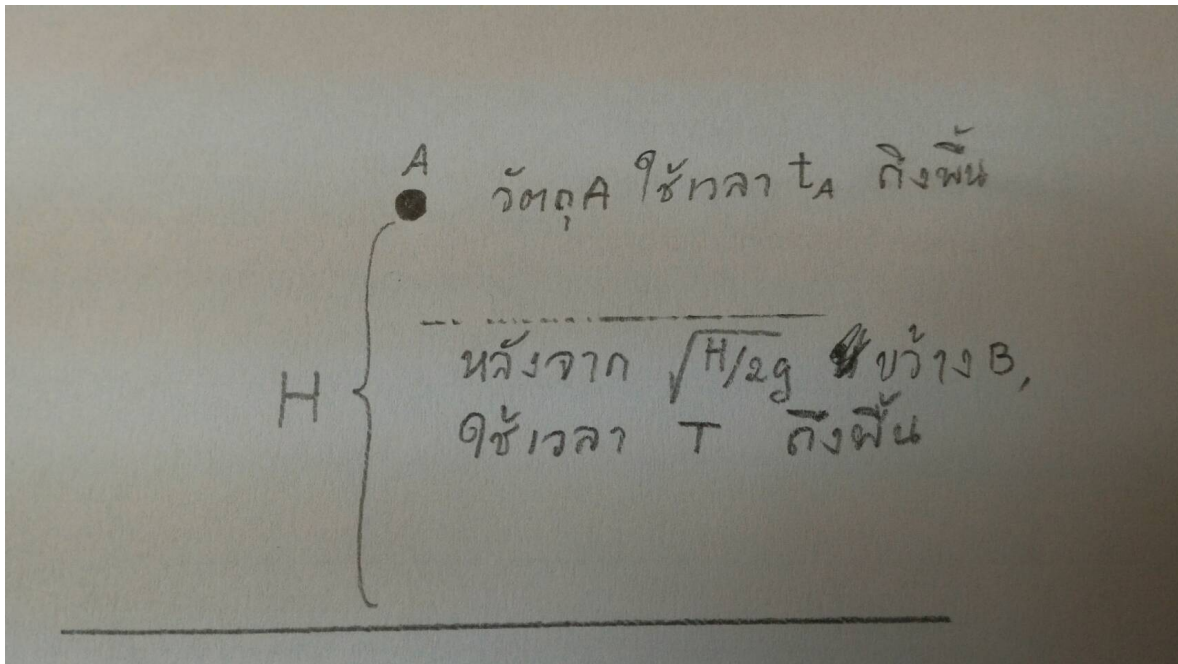
หลังจากเวลา $\sqrt{\frac{H}{2g}}$ ขว้าง B ตามลงไปด้วยอัตราเร็วต้น u_B และสามารถหาอัตราเร็วของ B ได้จาก

$$H = u_B \cdot t_B + \frac{1}{2}g(t_B)^2$$

$$H = u_B \cdot \sqrt{\frac{3H}{2g}} + \frac{1}{2}g \frac{3H}{2g}$$

$$u_B = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2gH}{3}}$$

ตอบ $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2gH}{3}}$



กำหนดให้ t_A เป็นเวลาที่ A ใช้เคลื่อนที่จนถึงพื้น มีค่าเท่ากับ

$$t_A = \sqrt{\frac{H}{2g}} + T$$

สามารถหา T จากการเคลื่อนที่ของ B ด้วยอัตราเร็ว u_B

$$H = u_B \cdot T + \frac{1}{2}gT^2$$

$$0 = T^2 + \sqrt{\frac{2H}{g}}T - \frac{3H}{2g}$$

$$T = +\sqrt{\frac{3H}{2g}}$$

หมายเหตุ เลือกค่าเวลาเป็นบวก

ดังนั้น สามารถหาอัตราเร็วของ B ได้จาก

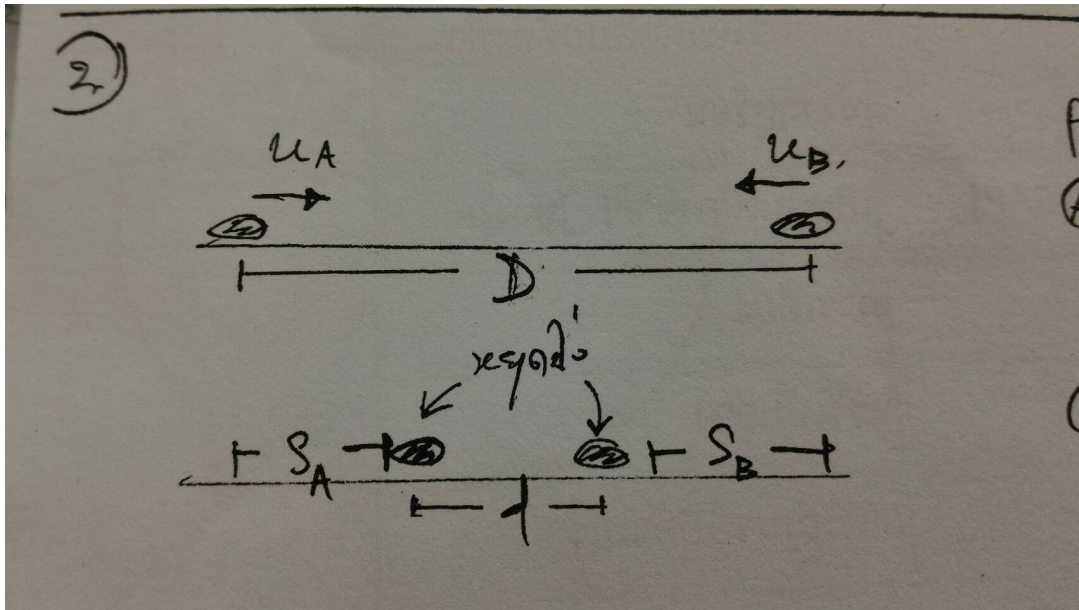
$$H = u_B \cdot \sqrt{\frac{3H}{2g}} + \frac{1}{2}g\frac{3H}{2g}$$

$$\therefore u_B = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2gH}{3}}$$

ข้อที่ 2

ตอบ 2.1) $\frac{a_B}{a_A} = \frac{u_B}{u_A}$

2.2) $a_A = \frac{u_A}{2(D-d)}(u_A + u_B)$



รถไฟ A เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว u_A ในช่วงเวลา t ด้วยอัตราเร่ง $-a_A$

$$u_A = -a_A t$$

รถไฟ B เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว u_B (เวลาช่วงเดียวกันกับที่รถไฟ A ไขว้) ด้วยอัตราเร่ง $-a_B$

$$u_B = -a_B t$$

$$\therefore \frac{a_B}{a_A} = \frac{u_B}{u_A}$$

จากรูป ถ้ารถไฟ A เคลื่อนที่ได้ระยะทาง S_A ในช่วงเวลา t ด้วยอัตราเร็วต้น u_A ส่วนรถไฟ B เคลื่อนที่ได้ระยะทาง S_B ในช่วงเวลา t ด้วยอัตราเร็วต้น u_B สามารถเขียนสมการบรรยายการเคลื่อนที่ของรถไฟทั้งสองได้ว่า

$$D = S_A + S_B + d \quad (1)$$

$$D - d = \left(u_A t - \frac{1}{2} a_A t^2 \right) + \left(u_B t - \frac{1}{2} a_B t^2 \right) \quad (2)$$

แทนค่าเวลา $t = \frac{u_A}{a_A} = \frac{u_B}{a_B}$ และ $a_B = \frac{u_B}{u_A} a_A$ ลงในสมการที่ (2) จะได้

$$D - d = \frac{1}{2} \frac{u_A}{a_A} (u_A + u_B)$$

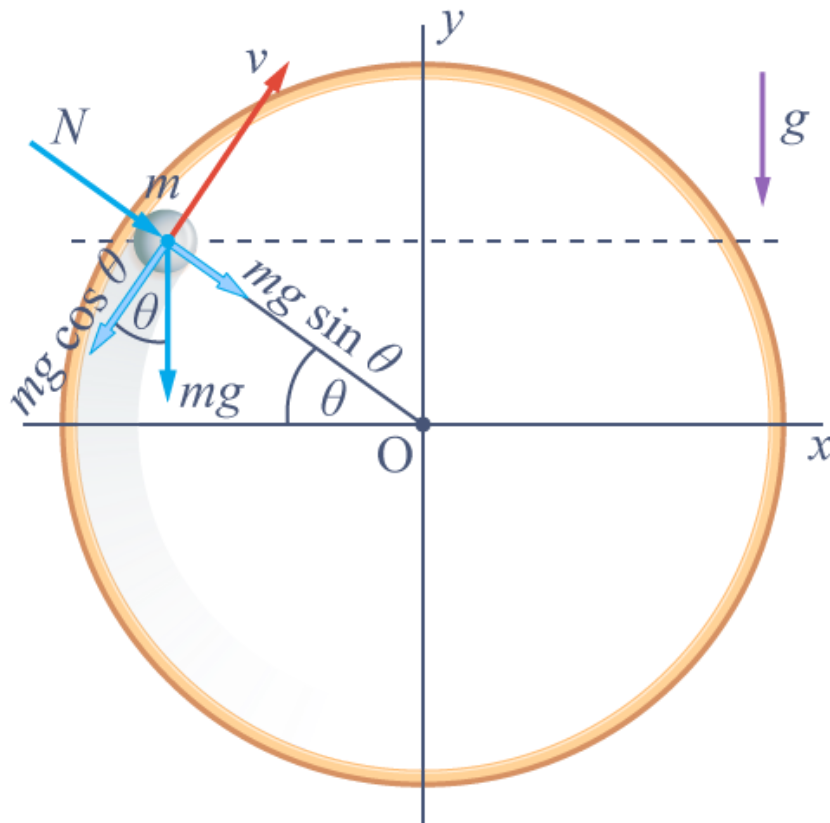
$$\therefore a_A = \frac{u_A (u_A + u_B)}{2 (D - d)}$$

ข้อที่ 3

ตอบ $2R \sin^2 \theta \cos \theta$

ในการคำนวณข้อนี้มี 2 ขั้นตอน

หาความเร็วที่ m เริ่มหลุดจากรางที่ A (เคลื่อนที่แบบวงกลม)



จาก Newton's 2nd law สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ ณ ตำแหน่งเหนือเส้น $\bar{OX}$ ก่อนที่มวล m จะหลุดจากรางได้ว่า

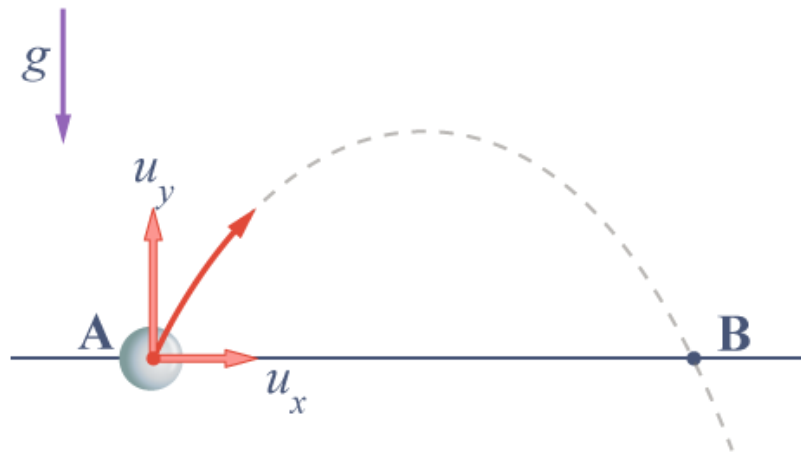
$$m \frac{v^2}{R} = mg \sin \theta + N$$

เมื่อมวล m หลุดจากราง ; $N = 0$ ดังนั้น

$$v = \sqrt{Rg \sin \theta}$$

เป็น ความเร็ว v ที่หลุดจากขอบราง และดังนั้นมวล m จึงเคลื่อนที่ต่อในลักษณะของ projectile motion ซึ่งสามารถหาความเร็วในแต่ละแนวแกนได้ดังนี้

$$v_x = v \sin \theta, \quad v_y = v \cos \theta$$



ระยะ $AB = v_x t$ (เวลาจาก $(A \rightarrow B)$)

โดยหาเวลาจากการกระจัดในแนวดิ่ง (จาก $A \rightarrow B$) เป็นศูนย์
จาก

$$S_y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$0 = u_y t - \frac{1}{2} g t^2$$

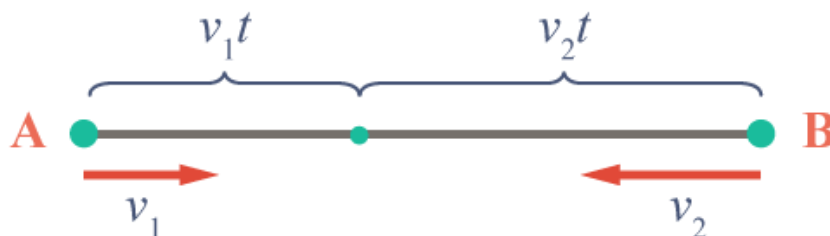
$$t = 2u_y / g$$

ดังนั้นระยะ AB จึงมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} u_x t &= \sqrt{Rg \sin \theta} \sin \theta \times 2 \frac{\sqrt{Rg \sin \theta} \cos \theta}{g} \\ &= 2R \sin^2 \theta \cos \theta \end{aligned}$$

ข้อที่ 4

ตอบ ทั้งคู่จะชนกันเมื่อ A เคลื่อนที่ได้ระยะทาง $\frac{v_1}{v_1 + v_2} d$



เวลาที่คนทั้งสองใช้วิ่งมาเจอกันจะมีค่าเท่ากับ ดังนั้น

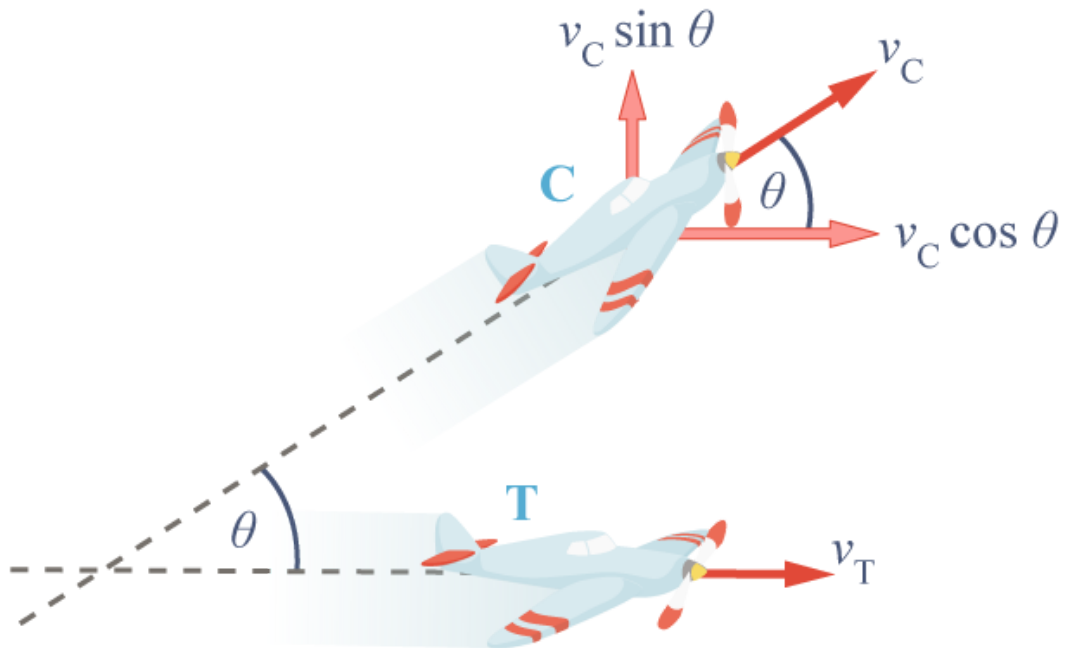
$$v_1 t + v_2 t = d$$

$$t = d / (v_1 + v_2)$$

$$\therefore \text{ระยะที่ } A \text{ วิ่ง} = v_1 t = \frac{v_1}{v_1 + v_2} d$$

ข้อที่ 5

ตอบ $\sqrt{v_c^2 + v_T^2 - 2v_C v_T \cos \theta}$



ความเร็วแนวระดับของ C ในแนวเดียวกับ T เมื่อสังเกตโดย T = $v_c \cos \theta - v_T$

ความเร็วแนวตั้งของ C ในแนวตั้งฉากกับแนวการเคลื่อนที่ของ T เมื่อสังเกตโดย T = $v_c \sin \theta$

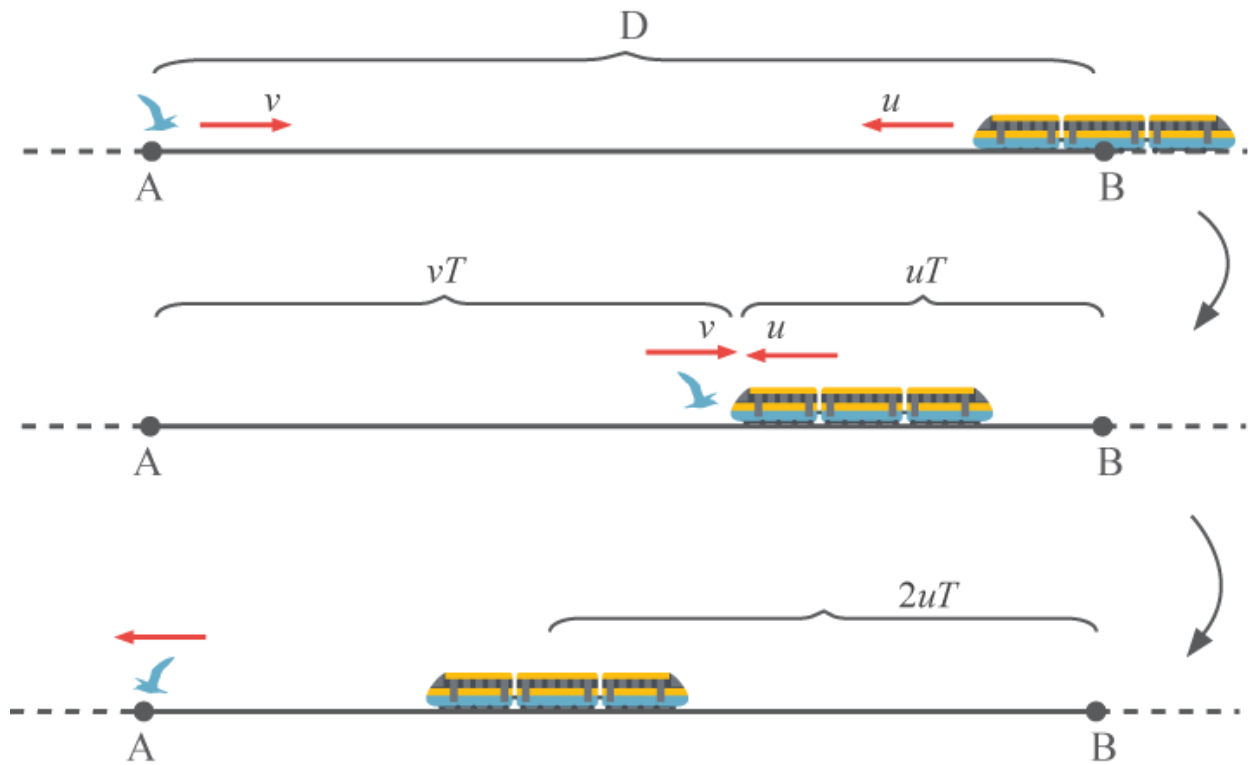
ดังนั้น ความเร็วที่ C หนีห่างจาก T

$$= \sqrt{(v_c \cos \theta - v_T)^2 + (v_c \sin \theta)^2}$$

$$= \sqrt{v_C^2 + v_T^2 - 2v_C v_T \cos \theta}$$

ข้อที่ 6

ตอบ $\left(\frac{2u}{u+v} \right) D$



จากรูปแสดงตำแหน่งนกและรถไฟที่เวลาต่าง ๆ กัน เมื่อเวลาผ่านไป T นกกับรถไฟเจอกันครั้งแรก เขียนสมการได้ว่า

$$S_{\text{นก}} + S_{\text{รถไฟ}} = D$$

$$vT + uT = D$$

$$T = \frac{D}{v + u}$$

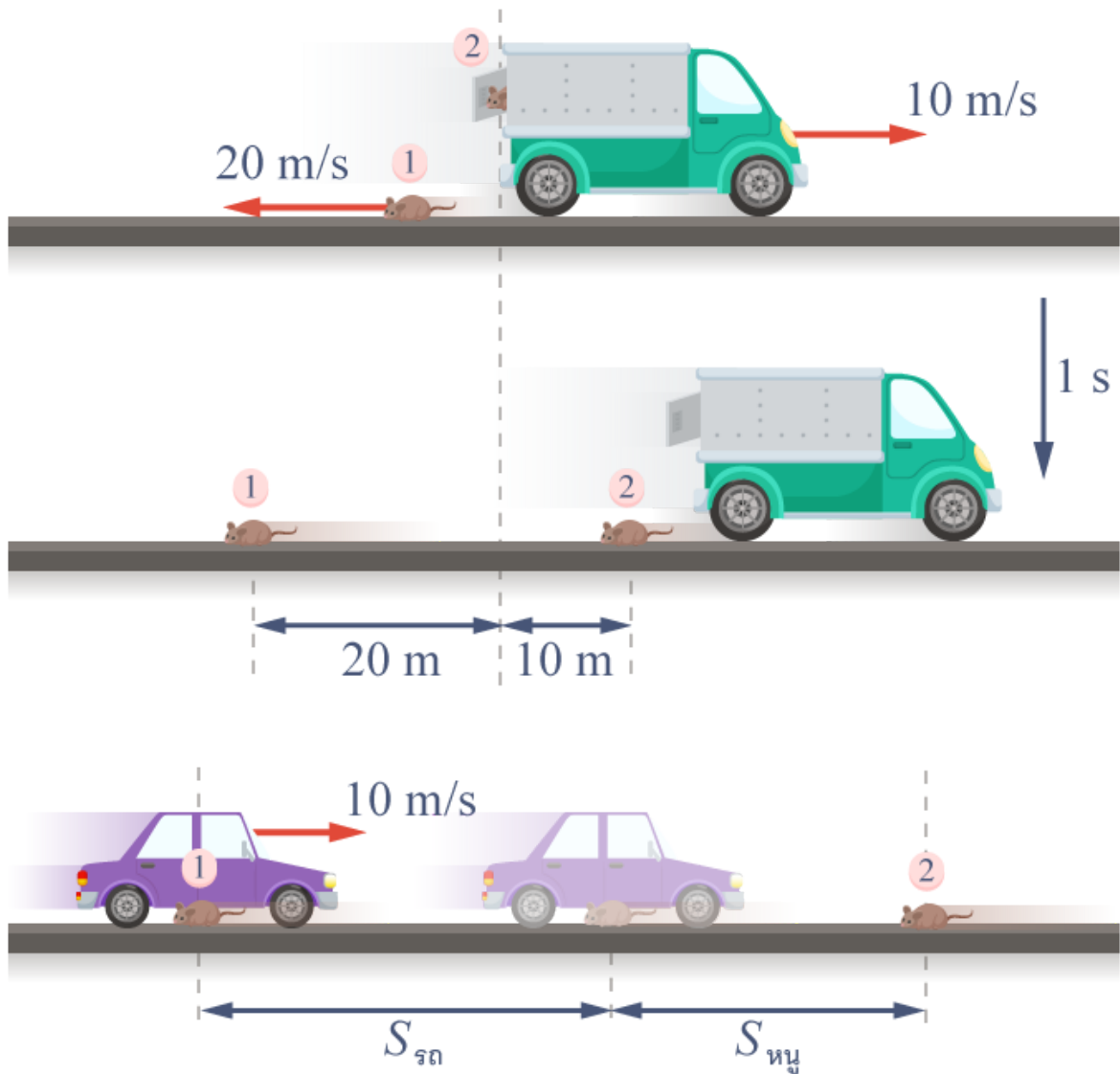
นกจะใช้เวลาในการกลับไปถึง $A = T$ (เท่าขามา)
 $\therefore$ ขณะนกบินถึง A , รถไฟอยู่ห่างจาก B

$$= u \cdot T + u \cdot T = \frac{2u}{u + v} D$$

ข้อที่ 7

ตอบ 80 ตัว

จริง ๆ ข้อนี้เรามีวิธีคิดง่าย ๆ คือ หา "ช่วงเวลา" ที่เว้นระยะการจับหนูแต่ละตัว ซึ่งก็หาได้หากรู้ "ระยะห่าง" ระหว่างหนูแต่ละตัว ซึ่งหาได้จากอัตราเร็วของรถจอมตลก อัตราเร็วของหนูและความถี่ในการปล่อยหนู



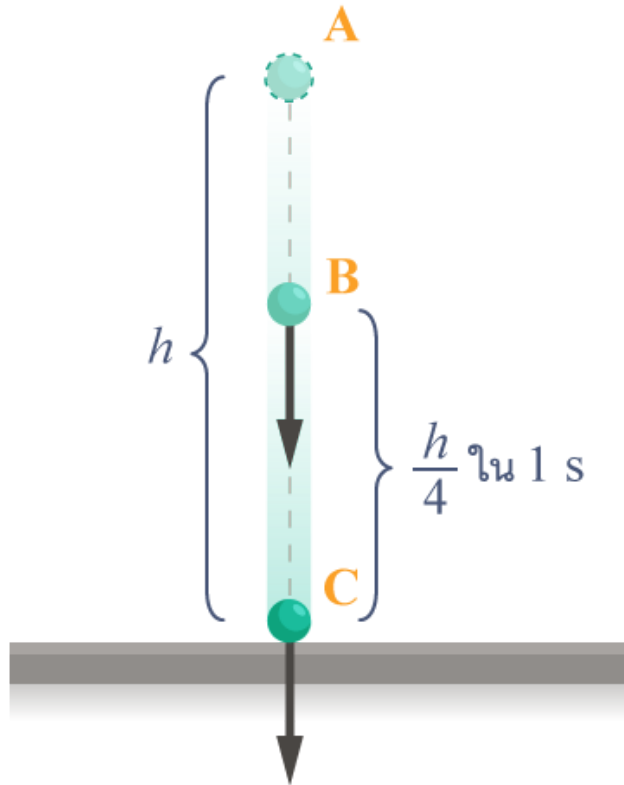
จากรูป ขณะที่หนูตัวที่ 1 ถูกปล่อยออกมาทันที มันมีความเร็ว 20 m/s และรถมีความเร็ว 10 m/s ในทิศตรงข้ามกัน เมื่อผ่านไป 1 s หนูตัวที่ 2 จึงถูกปล่อยออกมา ณ ขณะนั้น หนูตัวที่ 1 และ 2 อยู่ห่างกัน $20 + 10 = 30 \text{ m}$ พอดีหลังจากรถต่างควาจับหนูตัวที่ 1 แล้ว จะอยู่ห่างจากหนูตัวที่ 2 30 m ซึ่งทั้งรถและหนูจะวิ่งเข้าหากัน ในทั้ง 2 เจอกันภายในเวลา t ได้

$$\begin{aligned} S_{\text{รถ}} + S_{\text{หนู}} &= 30 \\ 20t + 20t &= 30 \\ t &= 0.75 \text{ s} \end{aligned}$$

$\therefore$ ใน 1 นาที จะจับหนูได้ $60 \text{ s} / (0.75 \text{ s}) = 80$ ตัว

ข้อที่ 8

ตอบ $4 + 2\sqrt{3}$



กำหนดให้ t เป็นเวลาที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่เป็นระยะ h ดังนั้น

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

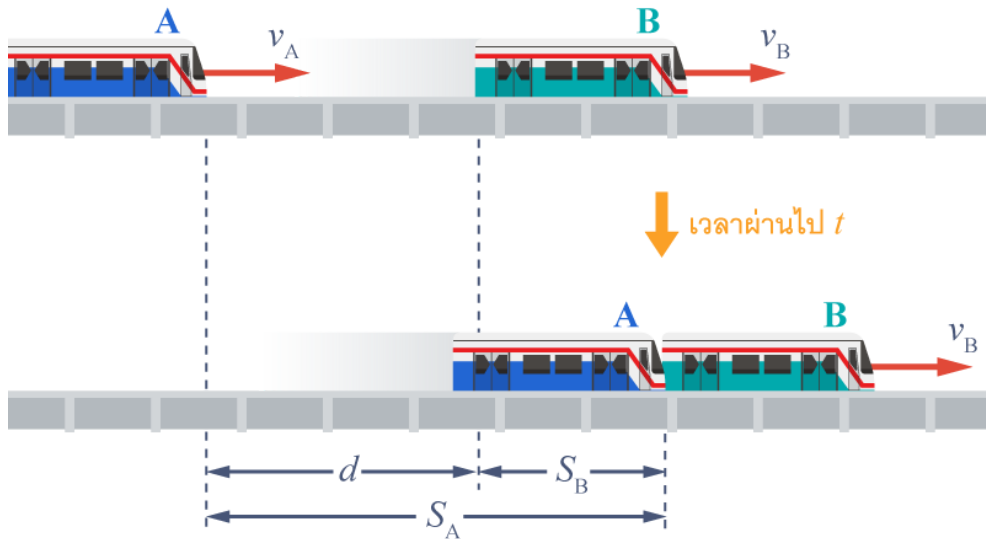
โจทย์ กำหนดว่า 1 วินาทีสุดท้ายวัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $\frac{1}{4}h$ ดังนั้น วัตถุใช้เวลา $t - 1$ เคลื่อนที่จากหยุดนิ่งลงมาเป็นระยะ $\frac{3}{4}h$ เขียนสมการได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}h &= \frac{1}{2}g(t-1)^2 \\ \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}gt^2 &= \frac{1}{2}g(t^2 + 1 - 2t) \\ t^2 - 8t + 4 &= 0 \\ t &= 4 \pm 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

เลือกค่าบวก เป็นเวลาที่วัตถุใช้ทั้งหมดก่อนตกถึงพื้น

ข้อที่ 9

ตอบ $a = \frac{(v_A - v_B)^2}{2d}$



ในข้อนี้ รถ A จะวิ่งตามไปทันท้ายรถ B พอดีแล้ว "ไม่ชน" เมื่อ A เร็วเท่า B พอดี ในที่นี้ A จะวิ่งได้การกระจัดมากกว่า B อยู่ d ได้

$$\begin{aligned} S_A &= d + S_B \\ v_A t - \frac{1}{2} a t^2 &= d + v_B t \end{aligned} \quad (1)$$

A วิ่งด้วยความเร็วต้น v_A ไปทัน B พอดีด้วยความเร็ว v_B โดยใช้เวลา t

$$\begin{aligned} v_A \text{ (ที่เวลา } t) &= v_B \\ v_A - a t &= v_B \end{aligned} \quad (2)$$

แก้สมการที่ 1 และ 2 โดย

$$\begin{aligned} t &= \frac{v_A + v_B}{a}; \\ (v_A - v_B) \left(\frac{v_A - v_B}{a} \right) - \frac{1}{2} a \left(\frac{v_A - v_B}{a} \right)^2 &= d \end{aligned}$$

∴ ความหน่วง

$$a = \frac{(v_A - v_B)^2}{2d}$$

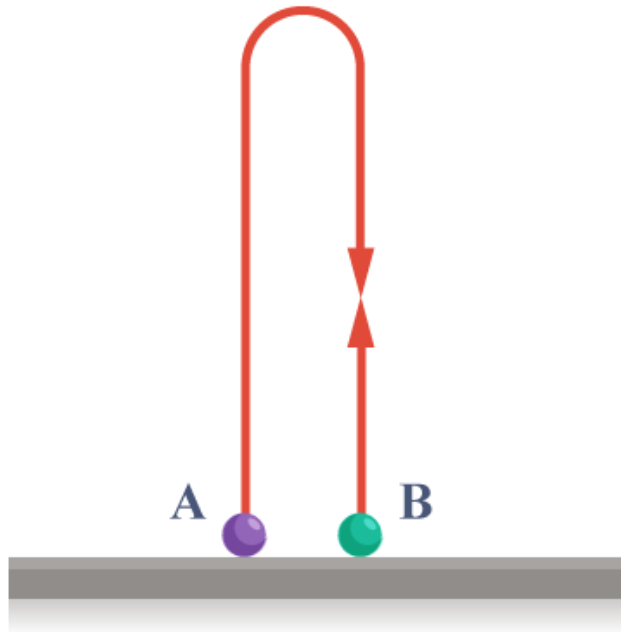
อีกวิธี คือให้ B อยู่นิ่ง (B เป็นผู้สังเกต) จะเห็น A วิ่งเข้ามาด้วยความเร็วต้น $v_A - v_B$ เข้าหาตัวเอง และหยุดในระยะ d จะได้

$$v^2 = u^2 + 2as$$

แทนค่าแล้วจะได้

$$\begin{aligned} 0 &= (v_A - v_B)^2 + 2(-a)d \\ a &= \frac{(v_A - v_B)^2}{2d} \end{aligned}$$

ตอบ $\frac{u^2}{2g}$



ปัญหาข้อนี้ โจทย์สนใจตำแหน่งที่วัตถุทั้งสองชนกัน ดังนั้น

พิจารณา A ที่เวลา $t + \frac{u}{g}$ เคลื่อนที่ได้ระยะทาง S_A จากความเร็วต้น u เขียนเป็นสมการได้เป็น

$$S_A = u\left(t + \frac{u}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(t + \frac{u}{g}\right)^2 \quad (1)$$

พิจารณา B เคลื่อนที่ได้ด้วยความเร็วต้น u ได้ระยะทาง S_B ใช้เวลา t เขียนเป็นสมการได้เป็น

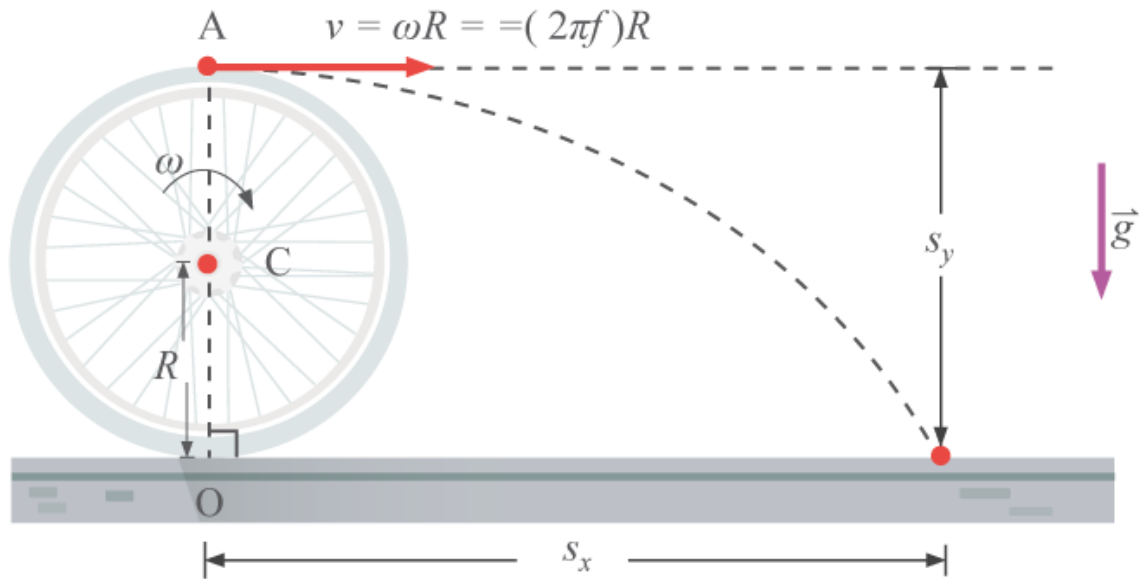
$$S_B = ut - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

ที่ เวลา $t + \frac{u}{g}$ นี้ วัตถุทั้งสองชนกัน นั่นคือวัตถุทั้งสองเคลื่อนที่ได้ระยะทางเท่ากัน ($S_A = S_B$) ดังนั้นเขียนสมการ (1)&(2) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} u\left(t + \frac{u}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(t + \frac{u}{g}\right)^2 &= ut - \frac{1}{2}gt^2 \\ t &= \frac{u}{2g} \\ \therefore S_B &= u \cdot \frac{u}{2g} \end{aligned}$$

เป็นความสูงของวัตถุทั้งสองตอนชนกัน

ตอบ $4\pi f \sqrt{\frac{R^3}{g}}$



การหมุนของล้อ ความเร็วที่จุด A จะมีค่าเท่ากับ ωR เมื่อ ω เป็นอัตราเร็วเชิงมุม เขียนในรูป $\omega = 2\pi f$ ได้ เมื่อ f คือ ความถี่ของการหมุน
 ดังนั้น ความเร็วต้น $2\pi f R$ นี้จะเป็นความเร็วต้นของ projectile ในแนวระดับ u_x :
 หาเวลาที่ projectile อยู่ในอากาศจาก

$$\underbrace{2R}_{S_y} = \underbrace{u_y}_0 t + \frac{1}{2} \underbrace{a_y}_g t^2$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

ด้วยเวลา t นี้ projectile จะวิ่งไปในแนวระดับได้ระยะทาง

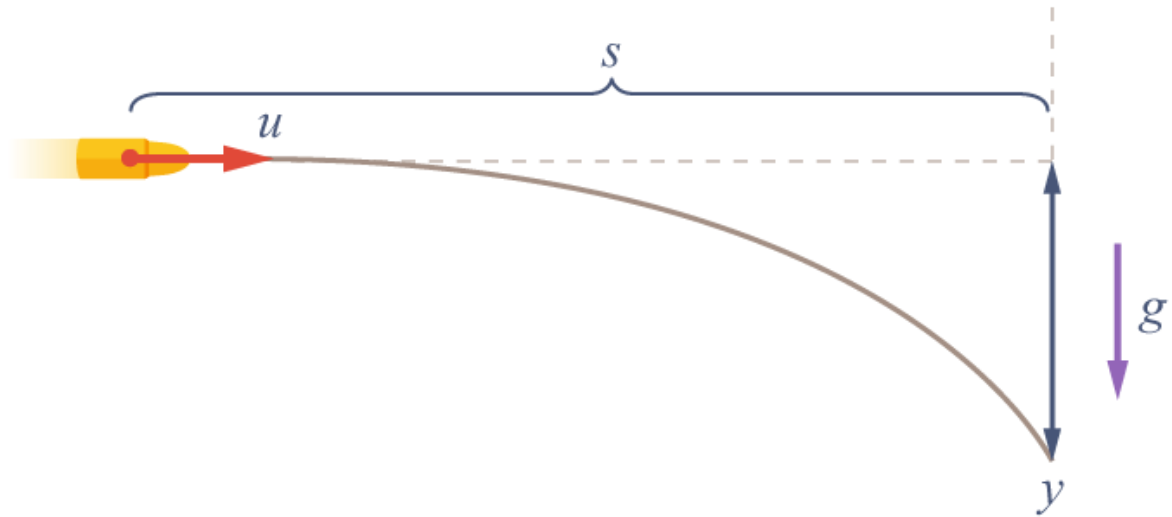
$$S_x = u_x t = (2\pi R f) \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

$\therefore$ projectile จะตกกระทบพื้นห่างจากจุด O เป็นระยะทาง

$$S_x = 4\pi f \sqrt{\frac{R^3}{g}}$$

ข้อที่ 12

ตอบ 20 mm



projectile จะวิ่งเป็นเส้นโค้งดังรูป โดยมีความเร็วในแนวระดับคงที่ เวลาที่กระสุนปืนใช้หาจากการเคลื่อนที่ตามแนวดิ่งเป็นระยะ 5 mm จากความสัมพันธ์

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$5 \text{ mm} = 0 + \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{10 \text{ mm}}{g}}$$

ดังนั้นความเร็วในแนวระดับจะมีค่าเท่ากับ

$$v_x = (25 \text{ m}) \sqrt{\frac{g}{10 \text{ mm}}}$$

ต่อไปหาเวลาที่กระสุนใช้ในการเคลื่อนที่เป็นระยะทาง 50 m

$$t = (50 \text{ m}) \cdot \frac{\sqrt{10 \text{ mm}}}{(25 \text{ m} \cdot \sqrt{g})} = 2 \sqrt{\frac{10 \text{ mm}}{g}}$$

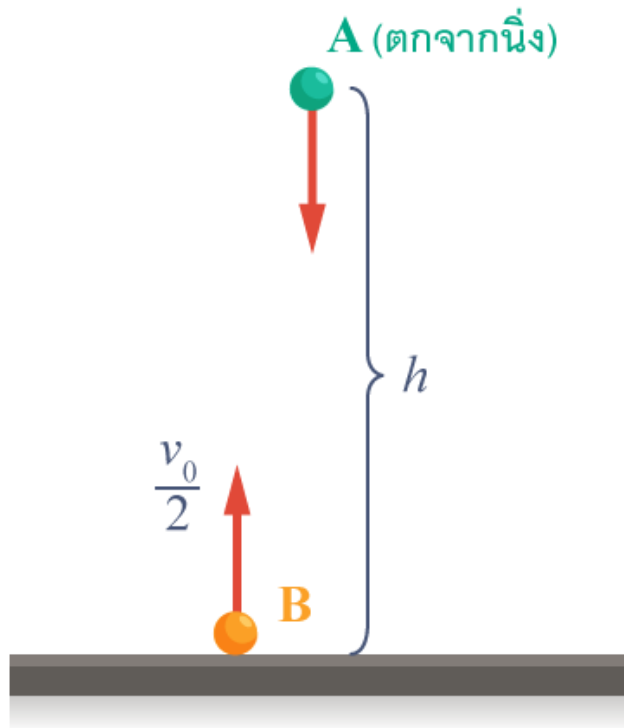
ดังนั้น ระยะทางในแนวดิ่งที่กระสุนใช้เวลา t ในการเคลื่อนที่คือ

$$S_y = 0 + \frac{1}{2}g \cdot \left(2 \sqrt{\frac{10 \text{ mm}}{g}}\right)^2 = 20 \text{ mm}$$

เป็นระยะที่กระสุนปืนกระทบเป้าใต้แนวการยิง

ข้อที่ 13

ตอบ ทันทันที่พื้นพอดี



เราหาความสูง h ที่ A ขึ้นไปได้จาก

$$\begin{aligned} v_f^2 &= v_i^2 + 2as \\ 0^2 &= v_o^2 + 2(-g)h \\ h &= v_o^2/2g \end{aligned}$$

และ(ระยะที่ A ตกลงมา) + (ระยะที่ B ขึ้นไป) = h

จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}gT^2 + \left(\frac{v_o}{2}T - \frac{1}{2}gT^2 \right) &= h \\ T &= \frac{2h}{v_o} \\ &= \frac{v_o}{g} \end{aligned}$$

เป็นเวลาที่ชนกันพอดี
ดังนั้นชนกันที่ความสูง

$$h - S_A = \frac{v_o^2}{2g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_o}{g}\right)^2 = 0$$

$\therefore$ หันกันที่พื้นพอดี

ข้อที่ 14

ตอบ

- 1) $15.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- 2) $6.24 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- 3) $6.55 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$\text{รู้ } u = 0 \text{ m/s}, a = 2.00 \frac{m}{s^2}, s = \frac{2\pi r}{4}, v = v$$

แทนค่า

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$v^2 = 0^2 + 2(2.00)\left(\frac{2\pi \times 40.0}{4}\right)$$

$$v = \sqrt{80.0\pi}$$

$$v = 15.8 \frac{m}{s}$$

กำลังแล่นไปทางทิศตะวันออก

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2}{R} \\ &= \frac{15.8^2}{40.0} \\ &= 6.24 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_c^2 + a_T^2} \\ &= \sqrt{6.24^2 + 2.00^2} \\ &= 6.55 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

ข้อที่ 15

ตอบ 0.747 m

เขียนสมการ เส้นแนวเดิน

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}gt^2 \\ x &= ut \end{aligned}$$

รวมสมการกำจัด t ได้

$$y = -\frac{g}{2u^2}x^2$$

เป็นพาราโบลาคว่ำ จุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ จากรูปแต่ละชั้นสูง 0.25 m กว้าง 0.2 m กำหนดให้ ทิศชี้ลงเป็นบวก ลบเพื่อกำจัด คำนวณแล้วย้ายข้าง

$$\sqrt{\frac{2u^2y}{g}} = x \dots\dots\dots (1)$$

หาชั้นที่ลูกบอลไปชนครั้งแรก

กำหนดค่า $y = 0.25n$, $x = 0.2n$ โดยที่ n คืออันดับของชั้นบันไดเริ่มนับจากจุดเริ่มยิง

แทนค่า $u = 1.4$, $g = 9.8$ ค่า x และ y ลงไปจัดรูปทำให้เขียนสมการเงื่อนไขได้ว่า

$$\sqrt{\frac{2(1.4)^2 0.25n}{9.8}} < 0.2n$$
$$\sqrt{\frac{n}{10}} < 0.2n$$

จะได้เงื่อนไข ของชั้นที่พบความน่าจะเป็นในการถูกกระเด็นโดนคือ $2.5 < n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก
ดังนั้น ชั้นที่ลูกบอลตกครั้งแรก คือ จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้สมการดังกล่าวเป็นจริง
นั่นคือ 3 จะได้ว่าลูกบอลเด้งที่ชั้นที่ 3 ครั้งแรก
แทน $y = 3(0.25)$ ในสมการ (1) เพื่อหาระยะห่างแนวแกน x จากจุด $(0, 0)$ ที่ชั้นที่ 3 จะได้

$$1.4\sqrt{\frac{1.5}{9.8}} = x$$

นำผลที่ได้มาจากโจทย์ แทนค่า

$$1.4 \times 0.391 = 0.547$$

ดังนั้น ห่างจากกำแพงเท่ากับ

$$0.20 + 0.574 = 0.747 \text{ m}$$