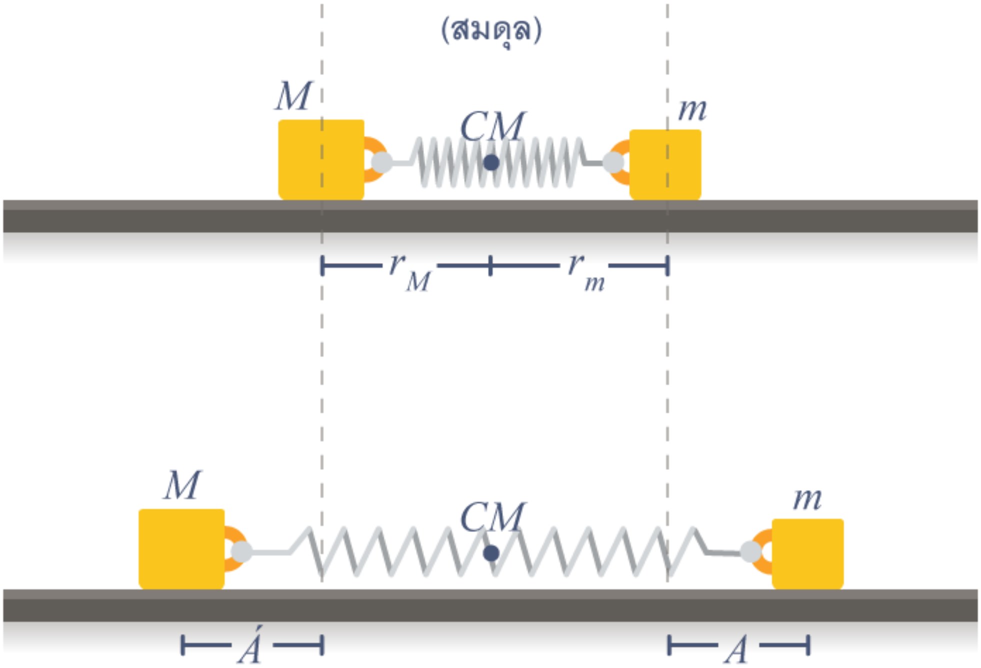
เฉลยชุดข้อสอบ : กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ชุดที่ 2

ข้อที่ 1

ตอบ $\frac{m}{M}A$



เนื่องจากไม่มีแรงภายนอกกระทำต่อระบบ จุด CM ของระบบต้องไม่มีความเร่ง (ในที่นี้ คือ "อยู่กับที่" ไปเลย) ดังนั้นไม่ว่า M, m จะพยายามเคลื่อนที่ออกจากสมดุลอย่างไร จุด CM ของมันจะอยู่ที่เดิม :

ที่สมดุล

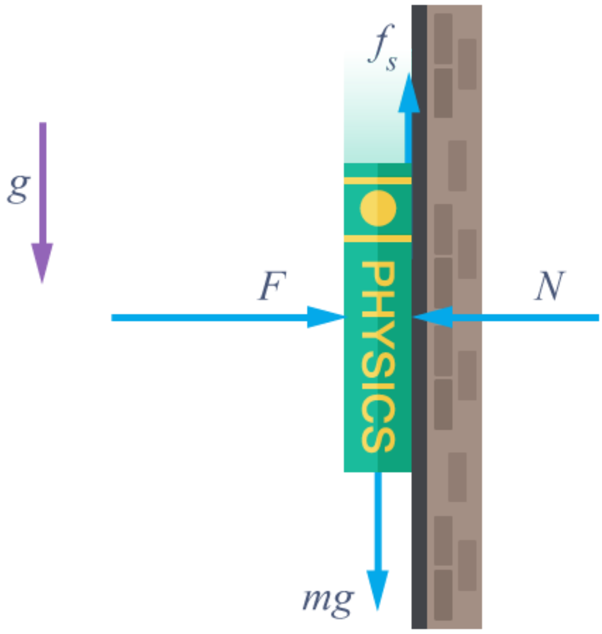
$$\begin{aligned} x_{cm} &= 0 \\ &= \frac{M(-x_M) + m x_m}{M+m} \\ \therefore \quad x_M &= \frac{m}{M} x_m \end{aligned}$$

ในขณะที่มวลทั้งสองสั่น x_M และ x_m จะเปลี่ยนแปลงอยู่ตลอดเวลาและจะเปลี่ยนในลักษณะที่อัตราส่วนระหว่าง x_M และ x_m เป็นค่าคงที่ $(\frac{m}{M})$ แอมพลิจูดของการสั่นก็จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะ x_M และ x_m นี้ด้วย ดังนั้น

$$\frac{\acute{A}}{A} = \frac{m}{M}$$

ข้อที่ 2

ตอบ $12.1)\ \ 28\ \mathrm{kg \cdot m/s^2}$
$12.2)\ \ 19.6\ \mathrm{N}$



เขียน free body diagram ดังรูป
วัตถุอยู่ในสมดุล ดังนั้นแรงลัพธ์ในแนวระดับเป็นศูนย์

$$F = N$$

แรงลัพธ์ในแนวดิ่งเป็นศูนย์

$$f_s = mg$$

จากเงื่อนไขของแรงเสียดทานสถิต

$$f_s \leq \mu_s \mathrm{N}$$

ได้

$$\begin{aligned} F &\geq \frac{f_s}{\mu_s} \\ &= \frac{mg}{\mu_s} \\ \therefore \quad F_{min} &= \frac{mg}{\mu_s} \\ &= \frac{(2\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})}{0.7} \\ &= 28\ \mathrm{kg \cdot m/s^2} \end{aligned}$$

(เป็นคำตอบข้อ 12.1)

เนื่องจาก

$$f_s = mg = 19.6\ \mathrm{N}$$

จะเท่าเดิมตลอดแม้จะเพิ่มค่า F ให้มากกว่า $28\ \mathrm{N}$ (สมดุลในแนวดิ่ง , การเพิ่ม F จะไม่ทำให้วัตถุเลื่อนขึ้น/ลง)
(เป็นคำตอบข้อ 12.2)

ข้อที่ 3

ตอบ ศูนย์

พิจารณาห่วงเล็ก ๆ ที่ตำแหน่งห่างจาก O เป็นระยะ R กำลังเคลื่อนที่รอบแกนดิ่งด้วยความเร็วเชิงมุม ω ความเร่งที่ห่วงเล็ก ๆ (a') สามารถบรรยายได้ด้วยหลักการของ การเคลื่อนที่ภายใต้กรอบไม่เฉื่อย ใน Polar coordinate $(r,\ \theta)$ นั่นคือ

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d}{dt}\vec{\omega} \times \vec{r}' \tag{1}$$

เมื่อ

$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}$ เป็นความเร่งเนื่องจากที่โลกกระทำต่อห่วงเล็ก ๆ

$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \vec{g} = g\cos\theta\,\hat{e}_r - g\sin\theta\,\hat{e}_\theta$

$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}'$ เป็นความเร่งของห่วงเล็ก ๆ

$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = -r(\frac{d}{dt}\theta)^2\,\hat{e}_r + \left(r\frac{d^2}{dt^2}\theta\right)\,\hat{e}_\theta$

$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = (\vec{\omega}\cdot r\vec{e}_r)\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})r\vec{e}_r = ([-\omega\cos\theta\,\hat{e}_r + \omega\sin\theta\,\hat{e}_\theta]\cdot r\hat{e}_r)\,\vec{\omega}$

$\vec{\omega}\times\vec{v}'$ เป็น Coriolis acceleration มีค่าเท่ากับ $= \vec{\omega}\times r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \omega r\dot{\theta}(-\vec{e}_r)$

$\frac{d}{dt}\vec{\omega} = 0$ เนื่องจากความเร็วเชิงมุม ณ ตำแหน่งสมดุลจะมีค่าคงที่

ในการหาจุดสมดุลสามารถทำได้โดย คูณสมการที่ (1) ด้วย $\hat{e}_\theta$ (สังเกตุว่า $\hat{e}_i\cdot\hat{e}_i = 1$ และ $\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j = 0$) จะได้ว่า

$$-g\sin\theta = r\ddot{\theta} + (-\omega r\cos\theta)(\omega\sin\theta)$$

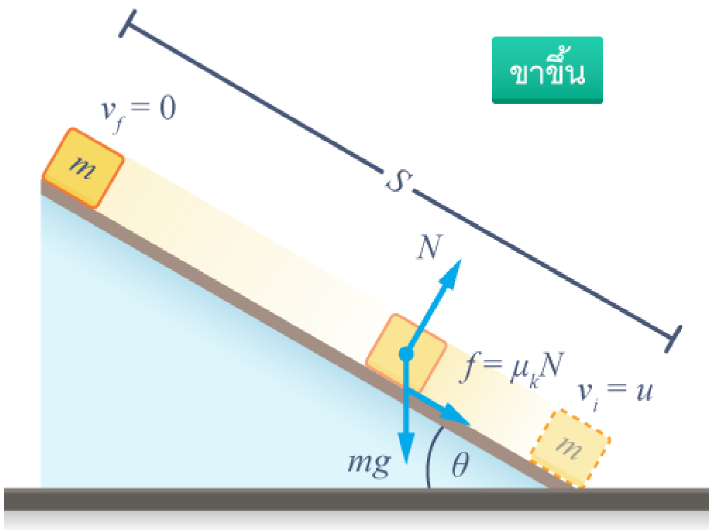
และใช้เงื่อนไขที่ว่า หมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ ดังนั้นความเร่งเชิงมุมจะมีค่าเป็นศูนย์ จะได้ว่า

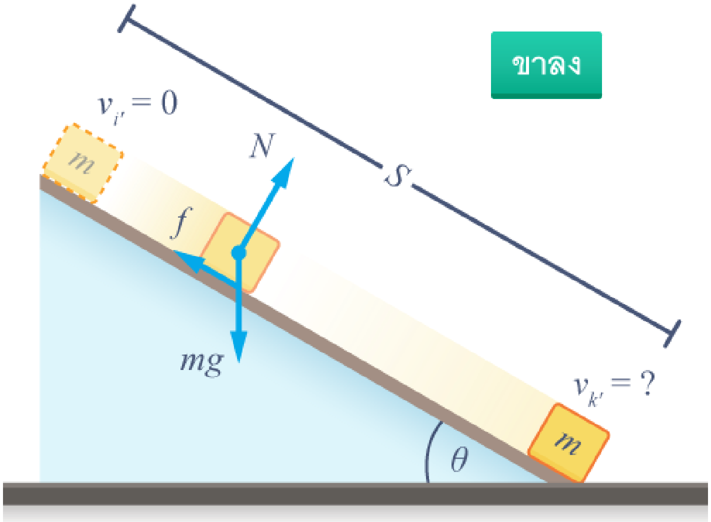
$$\omega^2 r\cos\theta = g$$
$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 r}$$

ดังนั้น ถ้าความเร็วเชิงมุมมีค่าโตมาก ๆ มุม θ จะมีค่าเท่ากับศูนย์

ข้อที่ 4

ตอบ $\sqrt{\frac{\sin\theta - \mu_k\cos\theta}{\sin\theta + \mu_k\cos\theta}}\cdot u$





แบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 (เนื่องจากมีความเร่งไม่เท่ากันทั้งขนาดและทิศทาง) โดยเราจะหาระยะทาง S ตามพื้นเอียงที่มันขึ้นไปได้สูงสุดก่อน จึงเริ่มหาความเร็วสุดท้ายที่ไถลลงมา

ขาขึ้น โดยพิจารณา freebody diagram พบว่า

$$N = mg\cos\theta$$
$$f = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta$$

จาก Newton's 2nd law เขียนสมการได้ว่า

$$ma = m(-g\sin\theta) - \mu_k g\cos\theta$$
$$a = -(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)g$$

เป็นความเร่งขาขึ้น นำความเร่งนี้ไปหาระยะที่มวลไถลขึ้น จนหยุดนิ่งอยู่ด้านบนพื้นเอียง เขียนสมการได้ว่า

$$0 - u^2 = 2(-1)\left(\sin\theta + \mu_k\cos\theta\right) g\cdot S$$
$$S = \frac{u^2}{2(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)g}$$

เป็นระยะทางที่มวลไถลขึ้นไปได้

ต่อไป พิจารณาขาลง จาก Newton's 2nd law เขียนสมการได้ว่า

$$ma = mg\sin\theta - \mu_k g\cos\theta$$
$$a = (\sin\theta - \mu_k\cos\theta)g$$

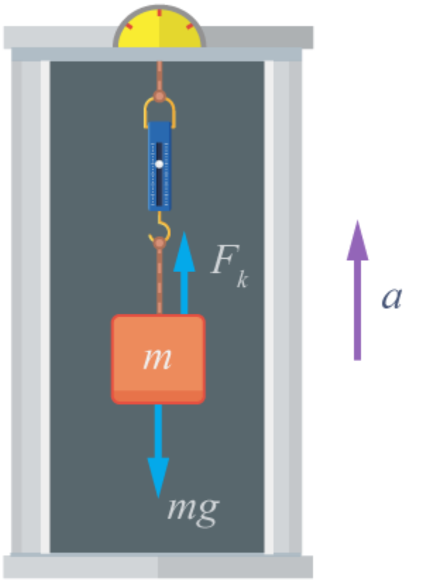
เป็นความเร่งขณะที่มวลเคลื่อนที่ลงพื้นเอียง

ต่อไป สามารถหาความเร็วปลายเมื่อมวลเคลื่อนที่กลับลงมาถึงพื้น ดังนี้

$$v^2 - u^2 = 2aS$$
$$v^2 - 0 = 2\cdot(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)g\cdot\frac{u^2}{2(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)g}$$
$$v^2 = \frac{\sin\theta - \mu_k\cos\theta}{\sin\theta + \mu_k\cos\theta}u^2$$
$$\therefore\quad v = \sqrt{\frac{\sin\theta - \mu_k\cos\theta}{\sin\theta + \mu_k\cos\theta}}\cdot u$$

ข้อที่ 5

ตอบ 1) $2.7\ \mathrm{m/s^2}$ ทิศขึ้น
2) ตราชั่งอ่านค่าได้ศูนย์



สมมติให้ Lift วิ่งขึ้นด้วย ความเร่ง a จะได้

$$
\begin{aligned}
ma &= F_k - mg \\
a &= \frac{125 - 10 \times 9.8}{10} \\
&= 2.7\, m/s^2
\end{aligned}
$$

$\therefore$ ลิฟท์มีความเร่ง $2.7\ \mathrm{m/s^2}$ ทิศขึ้น
เมื่อที่แขวนตาชั่งหลุดจากเพดาน ทั้งตาชั่งและมวล $10\ \mathrm{kg}$ จะตกอย่างอิสระ และมีความเร่ง g ดังนั้นจึงไม่มีแรงใด ๆ กระทำกับตราชั่ง ตราชั่งจึงอ่านค่าได้ศูนย์

ข้อที่ 6

ตอบ $\frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{Gm_2}{R_1}}$

พิจารณาระบบดาวคู่ มวล m_1 และ m_2 กำลังโคจรรอบจุดศูนย์กลางมวล (CM) ที่จุด O

$$
\begin{aligned}
X_{\mathrm{CM}} &= \frac{m_1(-R_1) + m_2(R_2)}{m_1 + m_2} = 0 \\
R_2 &= \frac{m_1 R_1}{m_2}
\end{aligned}
$$

พิจารณามวล m_1; เคลื่อนที่รอบจุด O โดยมีแรงดึงดูดระหว่างมวลทำหน้าที่เป็นแรงสู่ศูนย์กลาง F_c เขียนสมาการการเคลื่อนที่ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\Sigma F &= \frac{Gm_1m_2}{(R_1 + R_2)^2} \\
F_c &= m_1\omega^2 R_1 \\
\omega^2 &= \frac{Gm_2}{R_1(R_1 + R_2)^2}
\end{aligned}
$$

ระบบดาวมี ω เท่ากัน

$$
\begin{aligned}
\therefore \omega_2 = \omega_1 &= \sqrt{\frac{Gm_2}{R_1(R_1 + R_2)^2}} \\
v_2 = \omega_2 R_2 &= R_2\sqrt{\frac{Gm_2}{R_1(R_1 + R_2)^2}} \\
v_2 &= \left(\frac{m_1R_1}{m_2}\right)\sqrt{\frac{Gm_2}{R_1(R_1 + \frac{m_1R_1}{m_2})^2}} \\
v_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{Gm_2}{R_1}}
\end{aligned}
$$

ข้อที่ 7

1) แรงเสียดทานที่กระทำต่อวัตถุมีทิศไปทางซ้าย (ตรงข้ามกับความเร็ว) มีขนาดเท่ากับ

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg$$

2) ความเร่งของแผ่นไม้ไปทางขวา มีขนาดเท่ากับ

$$\begin{aligned} \Sigma F &= ma \\ \mu_k mg &= Ma \\ a &= \frac{\mu_k mg}{M} \end{aligned}$$

3) คิดแผ่นไม้

รู้ $u = 0, a = \frac{\mu_k mg}{M}, s = s_1, v = v, t = t$

$$\begin{aligned} v &= u + at \\ v &= 0 + \frac{\mu_k mg}{M} t - - - - (1) \end{aligned}$$

คิดวัตถุ หาความเร่งของวัตถุก่อนแล้วคำนวณการเคลื่อนที่

$$\begin{aligned} \Sigma F &= ma \\ -\mu_k mg &= ma \\ a &= -\mu_k g \end{aligned}$$

รู้$u = u, a = -\mu_k g, s = s_2, v = v, t = t$

$$\begin{aligned} v &= u + at \\ v &= u - \mu_k gt - - - - (2) \end{aligned}$$

$(1) = (2)$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\mu_k mg}{M} t &= u - \mu_k gt \\ t &= \frac{Mu}{\mu_k g(M+m)} \end{aligned}$$

คิดแผ่นไม้เพื่อคำนวณหาค่า s

$$\begin{aligned} s &= ut + \frac{1}{2}at^2 \\ s_1 &= 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_k mg}{M}\right)\left(\frac{Mu}{\mu_k g(M+m)}\right)^2 \\ s_1 &= \frac{mMu^2}{2\mu_k g(m+M)^2} \end{aligned}$$

4) หา s_2 ของวัตถุเทียบโลก

$$\begin{aligned} s &= ut + \frac{1}{2}at^2 \\ s_2 &= u\left(\frac{Mu}{\mu_k g(M+m)}\right) - \frac{1}{2}(\mu_k g)\left(\frac{Mu}{\mu_k g(M+m)}\right)^2 \\ s_2 &= \frac{u^2 M(M+2m)}{2\mu_k g(M+m)^2} \end{aligned}$$

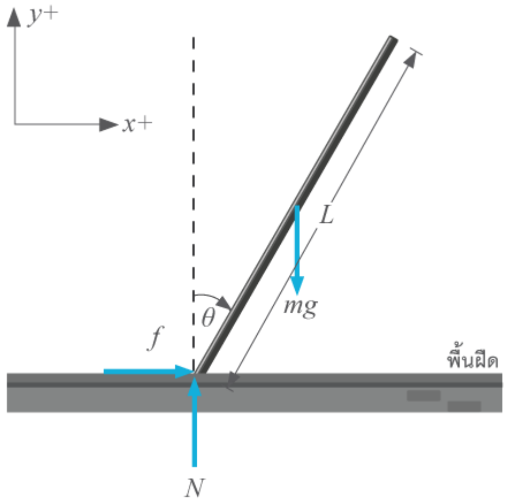
หา s_2 เทียบ s_1

$$\begin{aligned} s_{2/1} &= s_2 - s_1 = \frac{u^2 M(M+2m)}{2\mu_k g(M+m)^2} - \frac{Mmu^2}{2\mu_k g(M+m)^2} \\ s_{2/1} &= \frac{Mu^2}{2\mu_k g(M+m)} \end{aligned}$$

5) เมื่อวัตถุหยุดไถล $\mu_k = 0$ แรงเสียดทานจลน์เท่ากันศูนย์

แรงเสียดทานสถิต $f_s = \mu_s mg$

ข้อที่ 8



เงื่อนไขค่า μ : $\mu \geq \frac{f}{N}$ ทุกๆ θ
หา $f,\ N$ ที่ θ ต่างๆ

$$\begin{aligned} f &= m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_{\mathrm{cm}} = m\ddot{x}_{\mathrm{cm}} \\ N - mg &= m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y_{\mathrm{cm}} = m\ddot{y}_{\mathrm{cm}} \\ \frac{f}{N} &= \frac{\ddot{x}_{\mathrm{cm}}}{\ddot{y}_{\mathrm{cm}} + g} \end{aligned}$$

หา $\ddot{x}_{\mathrm{cm}}$, $\ddot{y}_{\mathrm{cm}}$

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{cm}} &= \frac{L}{2}\sin\theta \\ \dot{x}_{\mathrm{cm}} &= \frac{L}{2}\cos\theta\cdot\dot{\theta} \\ \ddot{x}_{\mathrm{cm}} &= \frac{L}{2}\cos\theta\cdot\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 \\ \\ y_{\mathrm{cm}} &= \frac{L}{2}\cos\theta \\ \dot{y}_{\mathrm{cm}} &= -\frac{L}{2}\sin\theta\cdot\dot{\theta} \\ \ddot{y}_{\mathrm{cm}} &= -\frac{L}{2}\sin\theta\cdot\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

หา $\dot{\theta}^2$, $\ddot{\theta}$
จากกฎการอนุรักษ์พลังงานรวมรอบจุดหมุนที่พื้นจะได้

$$\begin{aligned} K_0 + U_0 &= K + U \\ 0 + \frac{L}{2}mg &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}mL^2\right)\dot{\theta}^2 + mg\frac{L}{2}\cos\theta \\ \therefore\ \dot{\theta}^2 &= \frac{3g}{L}(1-\cos\theta) \\ \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\theta^2}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\theta^2}{\mathrm{d}\dot{\theta}}\cdot\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta} &= \frac{1}{2}2\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = \ddot{\theta} \\ \therefore\ \ddot{\theta} &= \frac{3g}{2L}\sin\theta \end{aligned}$$

แทนค่าใน $\ddot{x}_{\mathrm{cm}}$, $\ddot{y}_{\mathrm{cm}}$

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_{\mathrm{cm}} &= \frac{L}{2}\cos\theta\cdot\frac{3g}{2L}\sin\theta - \frac{L}{2}\sin\theta\cdot\frac{3g}{L}(1-\cos\theta)\\
&= \frac{3g}{4}(3\cos\theta\sin\theta - 2\sin\theta)\\
\ddot{y}_{\mathrm{cm}} &= -\frac{L}{2}\sin\theta\cdot\frac{3g}{2L}\sin\theta - \frac{L}{2}\cos\theta\cdot\frac{3g}{L}(1-\cos\theta)\\
&= \frac{3g}{4}(3\cos^2\theta - 1 - 2\cos\theta)
\end{aligned}
$$

ตอบ แรงเสียดทาน f มีค่าเท่ากับ

$$
f = m\ddot{x} = \frac{3mg}{4}(3\cos\theta - 2)\sin\theta
$$

ตอบ แรงปฏิกิริยา N ที่พื้นกระทำต่อปลายท่อนไม้ เท่ากับ

$$
\begin{aligned}
N &= m\ddot{y} + mg\\
&= \frac{3mg}{4}\left[3\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 + \frac{4}{3}\right]
\end{aligned}
$$

แทนใน $\dfrac{f}{N}$

$$
\begin{aligned}
\frac{f}{N} &= \frac{\ddot{x}_{\mathrm{cm}}}{\ddot{y}_{\mathrm{cm}} + g}\\
&= \frac{\frac{3g}{4}(3\cos\theta\sin\theta - 2\sin\theta)}{\frac{3g}{4}(3\cos^2\theta - 2\cos\theta + \frac{4}{3} - 1)}\\
&= \frac{3\cos\theta\sin\theta - 2\sin\theta}{3\cos^2\theta - 2\cos\theta + \frac{1}{3}}\\
&= \frac{(3\cos\theta - 2)\sin\theta}{(3\cos\theta - 1)(\cos\theta - \frac{1}{3})}\\
&= \frac{3(3\cos\theta - 2)\sin\theta}{(3\cos\theta - 1)^2}
\end{aligned}
$$

หาค่า θ

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{3\cos\theta - 2}{(3\cos\theta - 1)^2}\cdot 3\sin\theta &= \frac{3\cos\theta(3\cos\theta - 2)}{(3\cos\theta - 1)^2} + 3\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{3\cos\theta - 2}{(3\cos\theta - 1)^2}\\
&= \frac{3\cos\theta(3\cos\theta - 2)}{(3\cos\theta - 1)^2} - 3\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos\theta}\frac{3\cos\theta - 2}{(3\cos\theta - 1)^2}\\
&= \frac{3\cos\theta(3\cos\theta - 2)}{(3\cos\theta - 1)^2} - \frac{9\sin^2\theta}{(3\cos\theta - 1)^2} - 3\sin^2\theta(3\cos\theta - 2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos\theta}\frac{1}{(3\cos\theta - 1)^2}\\
&= \frac{3\cos\theta(3\cos\theta - 2)}{(3\cos\theta - 1)^2} - \frac{9\sin^2\theta}{(3\cos\theta - 1)^2} + \frac{18\sin^2\theta(3\cos\theta - 2)}{(3\cos\theta - 1)^3}\\
&= \frac{1}{(3\cos\theta - 1)^3}(3\cos\theta(3\cos\theta - 1)(3\cos\theta - 2) - 9\sin^2\theta(3\cos\theta - 1) + 18\sin^2\theta(3\cos\theta - 2))\\
&= \frac{1}{(3\cos\theta - 1)^3}((3\cos\theta)^3 - 3(3\cos\theta)^2 + 2(3\cos\theta) + 9\sin^2\theta(3\cos\theta - 3))\\
&= \frac{1}{(3\cos\theta - 1)^3}((3\cos\theta)^3 - 3(3\cos\theta)^2 + 2(3\cos\theta) + (9 - (3\cos\theta)^2)(3\cos\theta - 3))\\
&= \frac{1}{(3\cos\theta - 1)^3}((3\cos\theta)^3 - 3(3\cos\theta)^2 + 2(3\cos\theta) - (3\cos\theta)^3 + 3(3\cos\theta)^2 + 9(3\cos\theta - 3))\\
&= \frac{1}{(3\cos\theta - 1)^3}(2(3\cos\theta) + 9(3\cos\theta - 3))\\
&= 3\frac{(11\cos\theta - 9)}{(3\cos\theta - 1)^3}
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{3\cos\theta - 2}{(3\cos\theta - 1)^2}\cdot 3\sin\theta &= \frac{3(11\cos\theta - 9)}{(3\cos\theta - 1)^3}\\
0 &= \frac{3(11\cos\theta - 9)}{(3\cos\theta - 1)^3}\\
\theta &= \cos^{-1}\frac{9}{11}
\end{aligned}
$$

หา μ ด้วยการแทน $\theta = \arccos\frac{9}{11}$

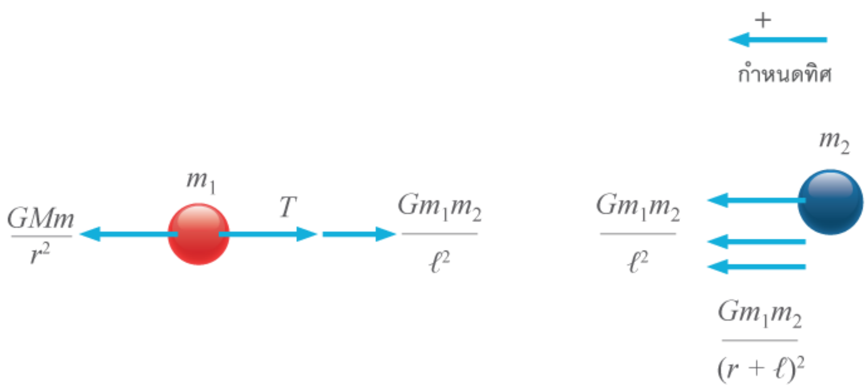
$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{f}{N} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{3\cos\theta - 2}{(3\cos\theta - 1)^2}\cdot 3\sin\theta \\
&= \frac{3\cdot\frac{9}{11} - 2}{\left(3\cdot\frac{9}{11} - 1\right)^2}\cdot\frac{3\sqrt{40}}{11} \\
&= \frac{15\sqrt{10}}{128} \\
&\approx 0.3706
\end{aligned}
$$

เป็นค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน(สถิต)ที่ทำให้ท่อนไม้ไม่ไถลในระหว่างล้มเลย **ตอบ**

ข้อที่ 9

ตอบ $T(r) = GM\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\frac{2\ell}{r^3}$

พิจารณา แผนภาพวัตถุเสรีของ m_1 และ m_2



แต่เชือกต้องมีความยาวคงตัว

$$
\begin{aligned}
a_1 = a_2 &= a \\
\frac{GMm_1}{r^2} - T - \frac{Gm_1m_2}{\ell^2} &= m_1 a \\
\frac{GM}{r^2} - \frac{T}{m_1} - \frac{Gm_2}{\ell^2} &= a
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
\frac{GMm_2}{(\ell+r)^2} + T + \frac{Gm_1m_2}{\ell^2} &= m_2 a \\
\frac{GM}{(\ell+r)^2} + \frac{T}{m_2} + \frac{Gm_1}{\ell^2} &= a
\end{aligned}
$$

ได้

$$
\begin{aligned}
GM\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(\ell+r)^2}\right) - T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{(m_2)}\right) - \frac{G}{\ell^2}(m_1+m_2) &= 0 \\
\frac{GM(2r\ell+\ell^2)}{r^2(r+\ell)^2} - \frac{G}{\ell}(m_1+m_2) &= T\left(\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\right) \\
T(r) = \frac{GMm_1m_2(2r\ell+\ell^2)}{(m_1+m_2)r^2(r+\ell)^2} - \frac{Gm_1m_2}{\ell^2}
\end{aligned}
$$

กรณี $r \gg \ell$
$r + \ell = r$ และ $2r\ell + \ell^2 = 2r\ell$

$$
T(r) = \frac{2GMm_1m_2\ell}{(m_1+m_2)r^3} - \frac{Gm_1m_2}{\ell^2}
$$

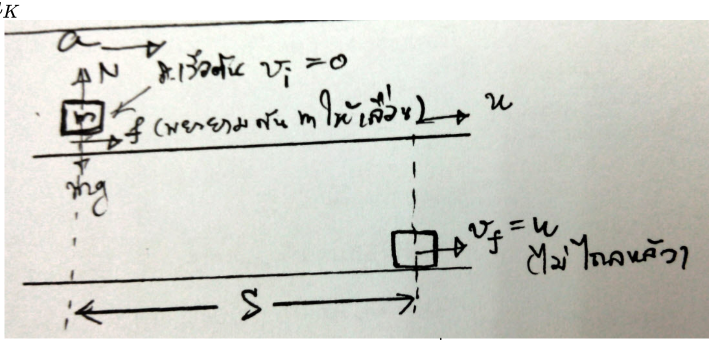
เพิ่มเติม
กรณี $m_1, m_2 \ll M$ และ $r \gg \ell$

$$T(r) = \frac{2GMm_1m_2\ell}{(m_1+m_2)r^3}$$

ข้อที่ 10

ตอบ 1) $T = \dfrac{u}{g\mu_K}$

2) $S = \dfrac{u^2}{2g\mu_K}$



ในกรณีนี้ แรงเสียดทานจลน์ $f_K = \mu_K N$ จะพยายามลากวัตถุ m ให้เลื่อนไปตามสายพาน โดยมันจะ กะทำกับ m ไปเรื่อย ๆ จนกว่าความเร็วของมันจะเท่ากับสายพานพอดี (ที่จุดนี้จะไม่มีการไถลระหว่างผิวอีก) แล้ว m จะเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วของสายพานต่อไปเรื่อย ๆ
จาก $\mathrm{freebodydiagram}$ เราได้

$$\sum F_y = 0; mg = N$$
$$\sum F_x = ma_x; \mu_K N = ma$$
$$a = \mu_K g$$

จาก $v_f = v_i + aT;$

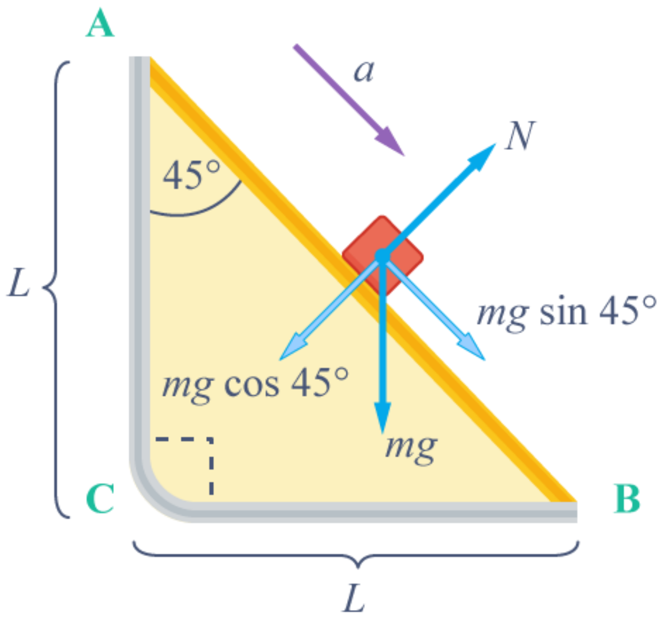
$$u = 0 + (\mu_K g)T$$
$$T = \frac{u}{g\mu_K}$$

จาก $v_f^2 = v_i^2 + 2aS;$

$$u^2 = 0 + 2(\mu_K g)S$$
$$S = \frac{u^2}{2g\mu_K}$$

ข้อที่ 11

ตอบ $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ เท่า



ทาง $A \rightarrow B$ การตกตามพื้นเอียงด้วยความเร่ง

$$a = \frac{mg \sin 45^\circ}{m}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} g$$

โดยเริ่มตกจากนิ่ง ได้ระยะทาง $\sqrt{2}$L
จาก

$$s = ut + \frac{1}{2} a t^2$$

ได้

$$t_{A \rightarrow B} = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$
$$= \sqrt{\frac{4L}{g}}$$

ทาง $A \rightarrow C$ คือ การตกอิสระ
จาก

$$s = ut + \frac{1}{2} a t^2$$
$$L = \frac{1}{2} g t_{A \rightarrow C}^2$$

ได้

$$t_{A \rightarrow C} = \sqrt{\frac{2L}{g}}$$

โดยมีความเร็วปลาย $v_c = u + at$

$$v_c = g \times t_{A \rightarrow C}$$
$$= \sqrt{2Lg}$$

ทาง $C \rightarrow B$ ใช้ $s = v_c t$ (ไม่มีความเร่งแนวระดับ);

$$t_{C \rightarrow B} = L / v_c$$
$$= \sqrt{\frac{L}{2g}}$$

$$\therefore \frac{\text{เวลาจาก } A \to C \to B}{\text{เวลาจาก } A \to B} = \frac{t_{A\to C} + t_{C\to B}}{t_{A\to B}}$$
$$= \frac{\sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{L}{2g}}}{\sqrt{\frac{4L}{g}}}$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ เท่า}$$

ข้อที่ 12

(ก) ในการหาแรงต้านการเคลื่อนที่ของโซ่ พิจารณาการดล ณ ตำแหน่งที่โซ่กำลังจะเคลื่อนที่ออกจากกองโซ่ เขียนสมการได้ว่า

$$F \cdot dt = \lambda \cdot d(xv)$$
$$F = \lambda v^2$$

ดังนั้น จากกฎข้อที่สามของ Newton แรง F นี้จะทำหน้าที่ต้านการเคลื่อนที่ของโซ่ส่วนที่ยาว x ด้วย และเมื่อคำนึงถึงแรงเสียดทาน สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ว่า

$$(M + \lambda x)\ddot{x} = -\mu(M + \lambda x)g - \lambda v^2$$

(ข) จาก Chain rule

$$\ddot{x} = (\frac{d}{dt})v = (\frac{d}{dx}\frac{dx}{dt})v = (\frac{d}{dx}v)v = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}v^2$$

แทนค่าผลที่ได้นี้เข้าไปในสมการการเคลื่อนที่ในข้อ (ก) แล้วจัดรูปได้

$$\frac{d}{dx}v^2 + \frac{2\lambda}{M + \lambda x}v^2 = -2\mu g$$

สามารถแก้สมการ (Differential equations) นี้โดยการหา Integrating factor มาคูณแล้วอินทริเกรต
การหา Integrating factor (I) สามารถคำนวญได้จาก

$$I = e^{\int \frac{2\lambda}{M+\lambda x}dx}$$
$$= (M + \lambda x)^2$$

แล้วคูณ factor นี้กับสมการการเคลื่อนที่

$$(M + \lambda x)^2\frac{d}{dx}v^2 + 2\lambda(M + \lambda x)v^2 = -2\mu g(M + \lambda x)^2$$
$$d(M + \lambda x)^2v^2 = -2\mu g(M + \lambda x)^2dx$$

อินทริเกรตจาก $x = 0$ และ $v = v_o$ ไปจนถึงตำแหน่ง x ใดๆและ v ใดๆ ทั้งสองข้างของสมการแล้วจัดรูป สามารถหาความเร็วของมวล M ที่ตำแหน่งใด ๆ ได้ว่า

$$v(x) = \sqrt{\frac{3\lambda M^2 v_o^2 - 2\mu g[(M + \lambda x)^3 - M^3]}{3\lambda(M + \lambda x)^2}}$$

(ค) differentiate ความเร็ว $v(x)$ ในข้อ (ข) เทียบเวลา ได้

$$a = \frac{1}{2v}\left[-2\mu g v - \frac{2v}{3(M + \lambda x)^3}\left(3\lambda M^2 v_o^2 - 2\mu g[(M + \lambda x)^3 - M^3]\right)\right]$$
$$= -\mu g - \frac{1}{3(M + \lambda x)^3}\left(3\lambda M^2 v_o^2 - 2\mu g[(M + \lambda x)^3 - M^3]\right)$$

(ง) แทนค่า $x = 0$ ตามเงื่อนไขลงในสมการที่ได้จากข้อ (ค) ได้

$$a = -\mu g - \frac{\lambda}{M}v_o^2$$

ซึ่งให้ผลเหมือนกันกับข้อ (ก) เมื่อ $x = 0$