

เฉลยชุดข้อสอบ : งาน พลังงาน โมเมนตัม ชุดที่ 2

ข้อที่ 1

ตอบ $\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 l$

ใช้หลักการอนุรักษ์พลังงานหาความเร็วของมวล m ก่อนกระทบ

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$
$$v = \sqrt{2gl}$$

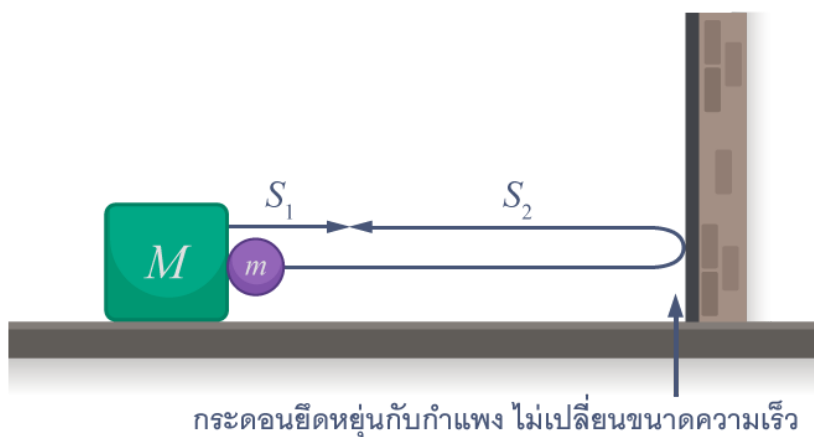
หลังจากการชน มวลทั้งสองติดไปด้วยกันเป็นการเป็นการชนแบบ Completely inelastic collision ดังนั้นจึงใช้หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมในการหาความเร็วหลังการชน

$$P_{i,m} + P_{i,M} = P_f$$
$$m\sqrt{2gl} + M(0) = (m+M)v_f$$
$$v_f = \frac{m}{m+M}\sqrt{2gl}$$

หลังจากนั้นมวลทั้งสองเคลื่อนที่รอบจุดหมุนตามแนวรัศมี l ของเชือก จนถึงจุดที่มีพลังงานศักย์สูงสุด ดังนั้นจากกฎการอนุรักษ์พลังงานจะสามารถหาตำแหน่งที่มวลทั้งสองขึ้นไปสูงสุด

$$\frac{1}{2}(m+M)v_f^2 = (m+M)gh_{\max}$$
$$h_{\max} = \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2(2gl)$$
$$= \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 l$$

ข้อที่ 2



ระยะทางรวม $S_1 + S_2 = 2D$

$$2D = S_1 + S_2$$

$$2D = vt + ut$$

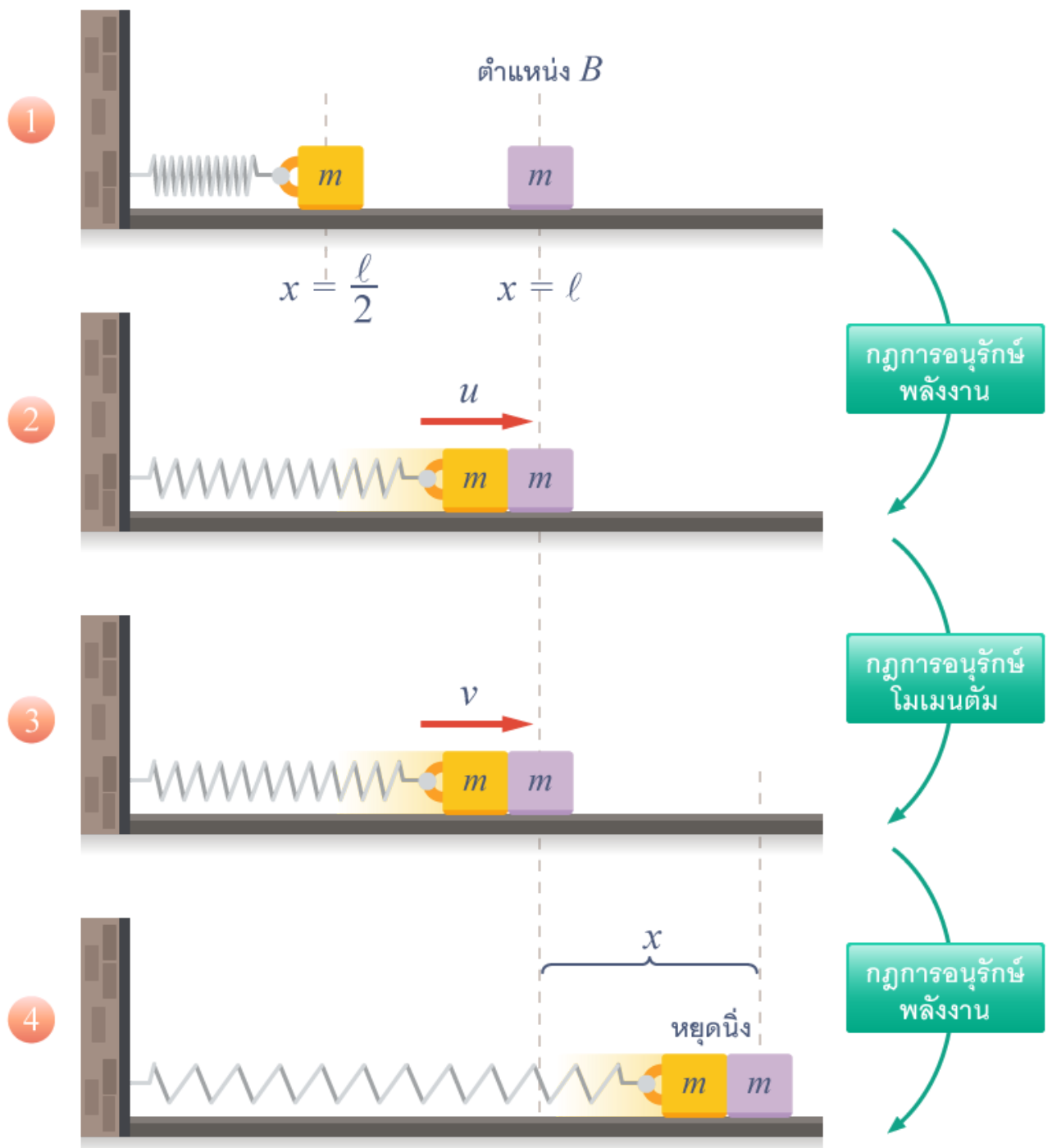
$$\frac{2D}{u+v} = t$$

ระยะ $S_2 = ut$

$$\therefore S_2 = \frac{2uD}{u+v}$$

ข้อที่ 3

ตอบ $\frac{l}{2\sqrt{2}}$



แบ่งสถานการณ์ในโจทย์ออกเป็นสถานการณ์ย่อย ดังนี้

1) m ดึงสปริงไปหตที่ $x = \frac{l}{2}$

จุดนี้มีพลังงาน (ศักย์สปริง)

$$E_1 = \frac{1}{2}k\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

2) ขณะสปริงยืดไปที่ความยาวธรรมชาติก่อนจะไปชน m อีกก้อนที่ B

จุดนี้มีพลังงาน (จลน์)

$$E_2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$E_1 = E_2$, พลังงานอนุรักษ์เนื่องจากแรงสปริงเป็นแรงอนุรักษ์

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}k\left(\frac{l}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2}mu^2 \\ u &= \frac{l}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\end{aligned}$$

3) มวล m ทั้ง 2 ชนกันแล้วติดกันไป (พลังงานไม่อนุรักษ์แล้ว) โมเมนตัมก่อนชน=หลังชน

$$\begin{aligned}P_4 &= P_3 \\ mu &= 2mv \\ v &= \frac{u}{2} \\ &= \frac{l}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}\end{aligned}$$

4) มวลทั้ง 2 ก้อนดึงสปริงจากจุด B ให้ยืดสุดที่ x นั่นคือมีพลังงาน (ศักย์สปริง), $E_4 = \frac{1}{2}kx^2$

จาก 3 $\rightarrow$ 4 พลังงานอนุรักษ์

$$\begin{aligned}E_3 &= E_4 \\ 2 \times \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}kx^2 \\ x &= \frac{l}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

ข้อที่ 4

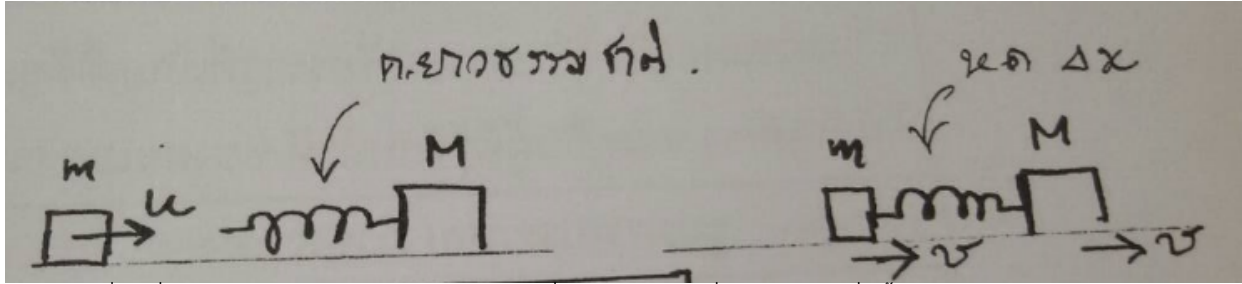
ตอบ $5 \times 10^9 \text{ g} \cdot (\text{mm/s})^2$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}1 \text{ J} &= 1 \text{ kg} \cdot \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \\ 5 \text{ J} &= 5 \times \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{1000 \text{ g}}{1 \text{ kg}} \times \left(\frac{10^3 \text{ mm}}{1 \text{ m}}\right)^2 \\ &= 5 \times 10^9 \text{ g} \cdot (\text{mm/s})^2\end{aligned}$$

ข้อที่ 5

ตอบ $u\sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{Mm}{M+m}\right)}$



มวล m เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u ชนมวล M ในขณะนั้นมวล M จะเริ่มมีความเร็วเพิ่มขึ้น มวล m จะมีความเร็วลดลง จนถึงจุดที่มวลทั้งสองมีความเร็วเท่ากัน สปริงจะหดมากที่สุด สามารถใช้กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม เขียนสมการได้ว่า

$$mu = (m + M)v$$
$$v = \frac{mu}{m + M}$$

และ พลังงานบางส่วนของมวล m ถูกเปลี่ยนเป็นพลังงานศักย์ในสปริงซึ่งแปรผันกับระยะหดของสปริง ใช้กฎการอนุรักษ์พลังงาน เขียนสมการได้ว่า

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}(m + M)v^2 + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$
$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{Mm}{M+m}\right)}u$$

ข้อที่ 6

ตอบ 2 เท่า

เนื่องจากไม่มีแรงภายนอกกระทำต่อระบบ ดังนั้นสามารถใช้กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมพิจารณาก่อนและหลังการระเบิดได้ว่า

$$P_{\text{total}} = P_A + P_B$$
$$mv = \frac{m}{2}v_A + \frac{m}{2}(0)$$
$$v_A = 2v$$

จะได้ว่าที่จุดสูงสุด v_A จะเร็วเป็น 2 เท่าของความเร็วก่อนระเบิดในแนวระดับ และเนื่องจากระยะเวลาจากจุดตั้งต้นจนถึงจุดสูงสุดเท่ากันกับเวลาจากจุดสูง สุดจนตกถึงพื้นอีกครั้ง ดังนั้นวัตถุชิ้น A จึงเคลื่อนที่ได้ระยะทางสองเท่าของระยะ OC ด้วย

ข้อที่ 7

ความเร็วก่อนกระแทกครั้งแรก

$$v = \sqrt{2gH}$$

ความเร็วหลังกระแทกครั้งแรก

$$v_1 = e\sqrt{2gH}$$

ความเร็วหลังกระแทกครั้งที่สอง

$$v_2 = e^2\sqrt{2gH}$$

ความเร็วหลังกระแทกครั้งที่ n

$$v_n = e^n\sqrt{2gH}$$

พลังงานจลน์หลังกระแทกครั้งที่ n

$$E_{kn} = \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{2}m(e^n\sqrt{2gH})^2 = e^{2n}mgH$$

และจะกระดอนขึ้นไปได้สูงสุดหลังจากกระแทกครั้งที่ n

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$0^2 = (e^n\sqrt{2gH})^2 - 2gs$$

$$s = e^{2n}H$$

ข้อที่ 8

ตอบ 75°C

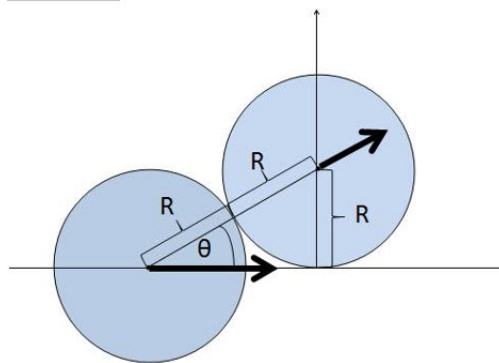
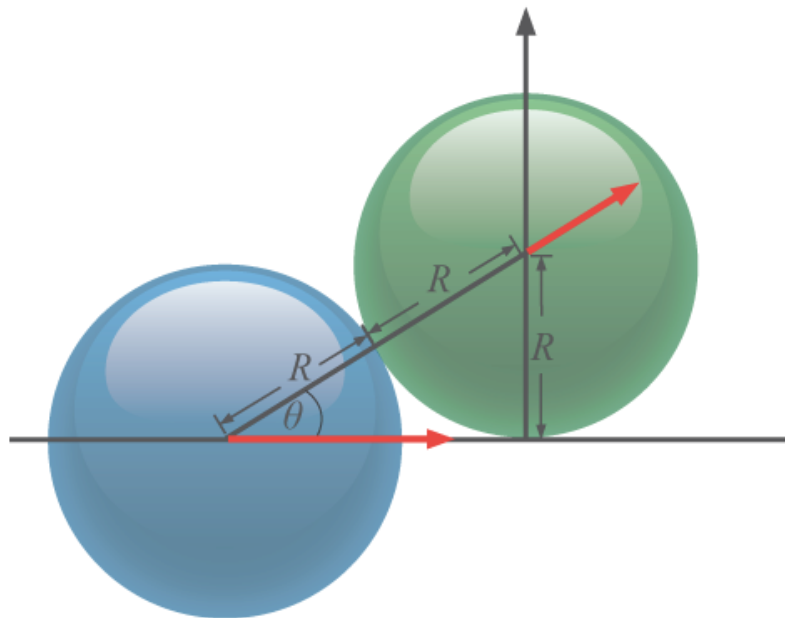
ครึ่งหนึ่งของพลังงานจลน์เสียไปให้เป็นพลังงานความร้อน

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = ms\Delta T$$

เมื่อ s คือความจุความร้อนจำเพาะของตะกั่ว ดังนั้น

$$\begin{aligned}\Delta T &= \frac{v^2}{4s} \\ &= \frac{1}{4} \frac{(200 \text{ m/s})^2}{0.032 \times 1.00 \frac{\text{cal}}{(\text{g} \cdot ^\circ\text{C})} \times (4.186 \frac{\text{kg} \cdot (\text{m/s})^2}{\text{cal}})} \\ &= 75^\circ\text{C}\end{aligned}$$

ข้อที่ 9



จากรูปขณะที่ชนกัน จะได้ว่า

$$\sin \theta = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

ซึ่ง

$$\theta = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

ข้อที่ 10

โจทย์บอกว่าไม่มีการเสียดและกระแทก

$$\therefore mg = \frac{MV^2}{R}$$

$$gR = v^2 \dots \dots \dots (1)$$

และจากกฎการอนุรักษ์พลังงาน จะได้ว่า

$$\sum E_A = E_B$$

ตั้งจุด B เป็นระดับอ้างอิง และให้ระยะทางที่ต้องการเป็น x จะได้

$$mgx = \frac{1}{2}MV^2$$

$$V^2 = 2gx \dots \dots \dots (2)$$

$$x = \frac{R}{2}$$

ข้อที่ 11

ปล่อยลูกบอลตกลงมาจากที่สูง $H_1 = 10$ m ตกลงมาถึงพื้นด้วยความเร็วขนาด u_1 ทิศขึ้นพื้น
ลูกบอลกระดอนแล้วลอยขึ้นด้วยความเร็วขนาด u_2 และลอยไปได้สูง $H_2 = 2.5$ m
ระหว่างตกลงมาที่พื้น พลังงานอนุรักษ์จะได้ว่า

พลังงานศักย์ที่ลดลง = พลังงานจลน์ที่เพิ่มขึ้น

$$PE_i = KE_f$$

$$mgH_1 = \frac{1}{2}mu_1^2$$

นั่นคือ

$$u_1 = \sqrt{2gH_1}$$

เช่นเดียวกันขณะที่กระดอนเสร็จแล้วพอดี แล้วเริ่มลอยขึ้น

พลังงานจลน์ที่ลดลง = พลังงานศักย์ที่เพิ่มขึ้น

จะได้ว่า

$$u_2 = \sqrt{2gH_2}$$

นั่นคือในช่วงระหว่างกระดอนด้วยช่วงเวลาทั้งหมด $\Delta t = 0.1$ s วัตถุจะมีความเร่ง(เป็นปริมาณเวกเตอร์)ที่มีขนาด

$$\begin{aligned} \left| \vec{a} \right| &= \left| \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} \right| \\ &= \frac{\sqrt{2gH_2} - (-\sqrt{2gH_1})}{\Delta t} \\ &= \frac{\sqrt{2(9.8 \text{ m/s}^2)(2.5 \text{ m})} + \sqrt{2(9.8 \text{ m/s}^2)(10 \text{ m})}}{0.1 \text{ s}} \end{aligned}$$

นั่นคือ ทิศนั้นมีทิศขึ้น

$$\left| \vec{a} \right| = 2.1 \times 10^2 \text{ m/s}^2$$

ข้อที่ 12

ตอบ $v_M = \frac{M}{M+m}v_o$ และ $PE = \frac{1}{2} \left(\frac{mM}{M+m} \right) v_o^2$

สถานการณ์ตั้งใจกำหนดจะเป็นไปตามนี้คือ เมื่อมวล M เริ่มเคลื่อนที่ไปทางขวา ขณะที่ยางยืดเริ่มดึงมวล m จะเริ่มเคลื่อนที่ ตรวจจับมวล M ยังคงเคลื่อนที่ไปทางขวา มวล M จะดึงยางให้ยืดมากขึ้นพร้อมกับมวล m ก็จะมีความเร็วเพิ่มขึ้น จนถึงขณะที่ความเร็วของมวลทั้งสองเท่ากันยางจะยืดมากที่สุด สถานการณ์ตั้งแต่มวล M เริ่มเคลื่อนที่จนกระทั่งมีความเร็วคงที่นี้ สามารถพิจารณาว่าเป็นการชนแบบไม่ยืดหยุ่น (Inelastic Collision) สามารถคำนวณหาความเร็วของมวลทั้งสองได้จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม :

$$Mv_o = Mv + mv$$

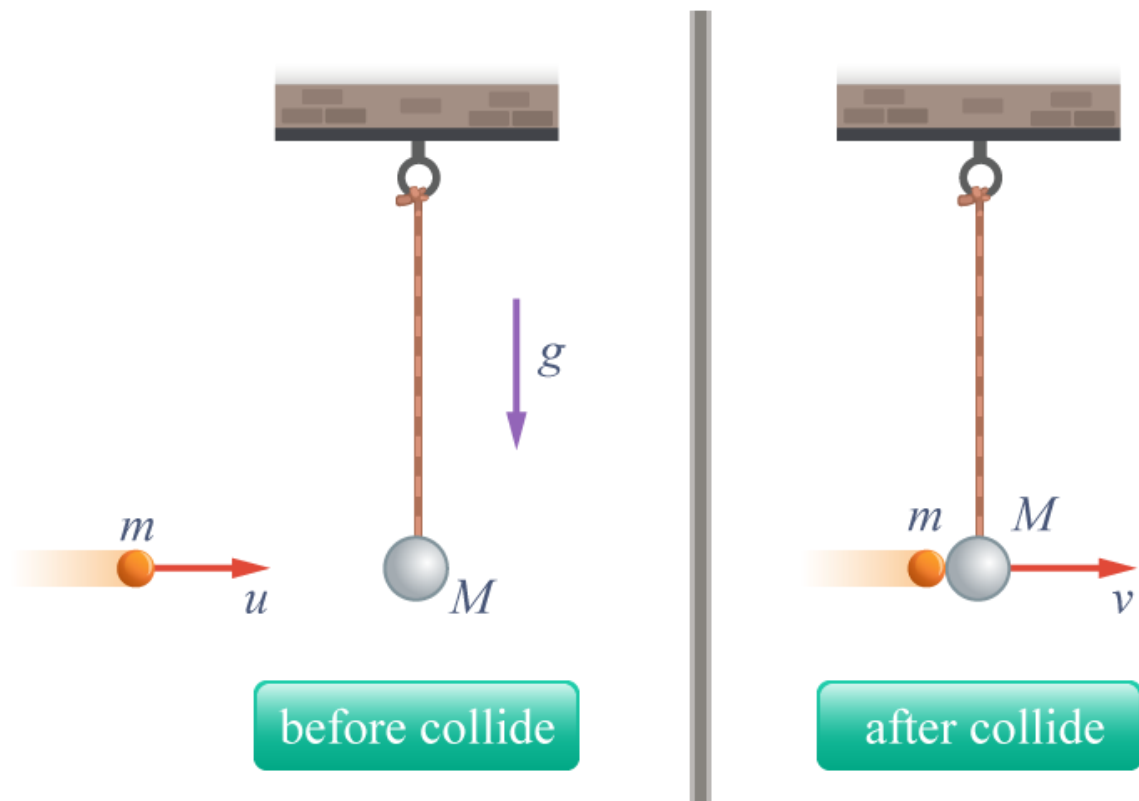
$$v = \frac{M}{M+m}v_o$$

เป็นความเร็วของมวล M และ m
ในการหาพลังงานศักย์ในยางยืด (PE) สามารถใช้กฎการอนุรักษ์พลังงานได้ โดยที่

$$\begin{aligned} KE_{\text{เริ่มต้น}} &= KE_{\text{ยืดสุด}} + PE \\ PE &= KE_{\text{เริ่มต้น}} - KE_{\text{ยืดสุด}} \\ &= \frac{1}{2}Mv_o^2 - \frac{1}{2}(M+m)v^2 \\ &= \frac{1}{2}Mv_o^2 - \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{M}{M+m}v_o\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{mM}{M+m}\right)v_o^2 \end{aligned}$$

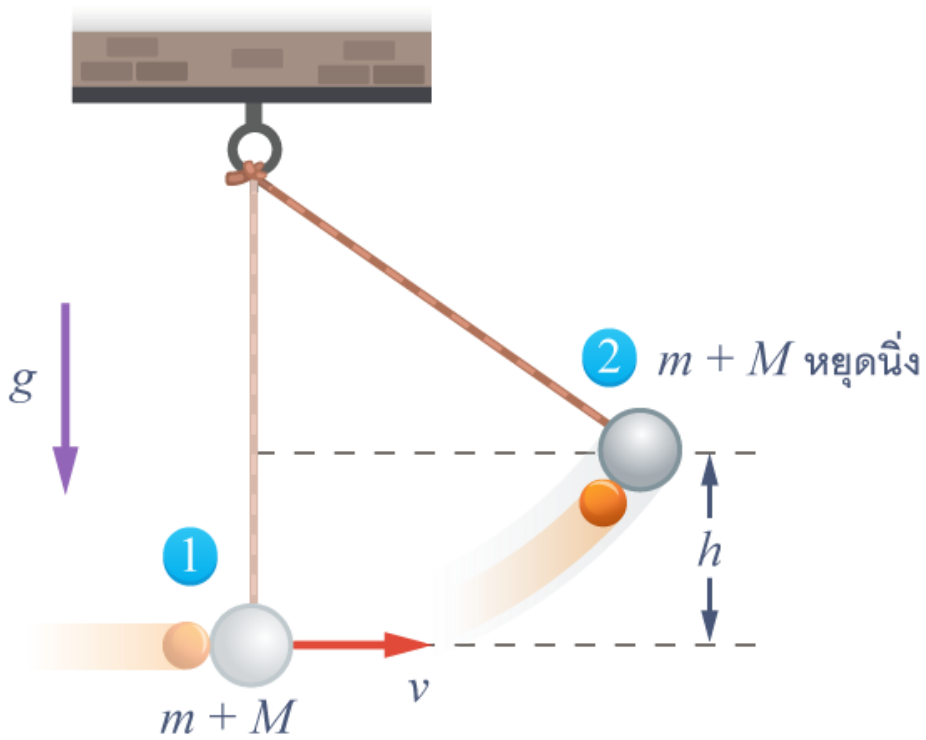
ข้อที่ 13

ตอบ สูงจากเดิม $\frac{1}{2g}\left(\frac{m}{m+n}\right)^2$



ในขั้นแรก เราต้องคำนวณหาความเร็วหลังชนของ m และ M ก่อน (โจทย์กำหนดให้ชนแล้วติดกันไป)
กฎอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\begin{aligned} mu &= (m+M)v \\ v &= \left(\frac{m}{m+M}\right) \times u \end{aligned}$$



หาความสูงที่เหวี่ยงไปได้ จากกฎอนุรักษ์พลังงาน
 $E_{ท1} = E_{ท2}$

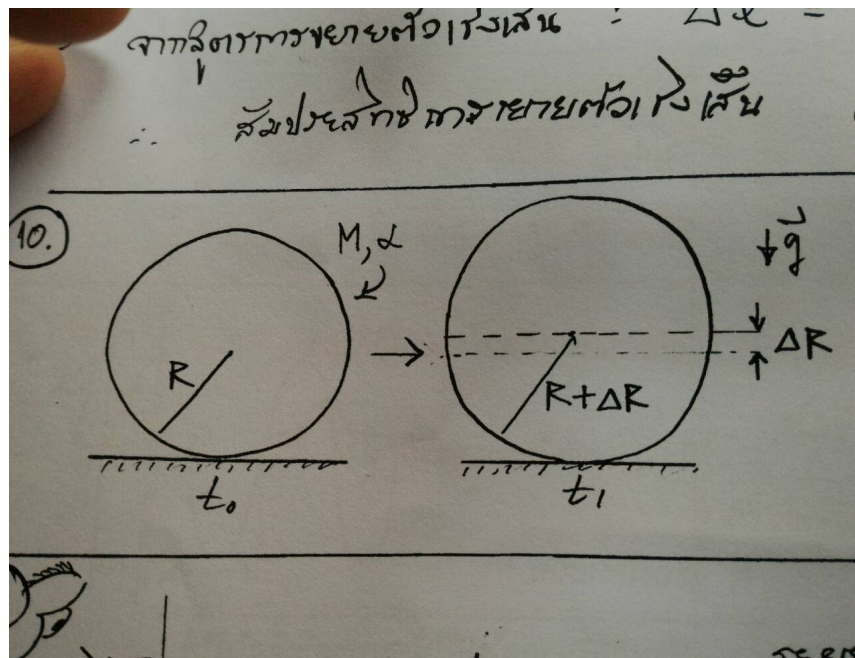
$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = (m+M)gh$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} h &= \frac{v^2}{2g} \\ &= \frac{v^2}{2g} \left(\frac{m}{m+n} \right)^2 \end{aligned}$$

ข้อที่ 14

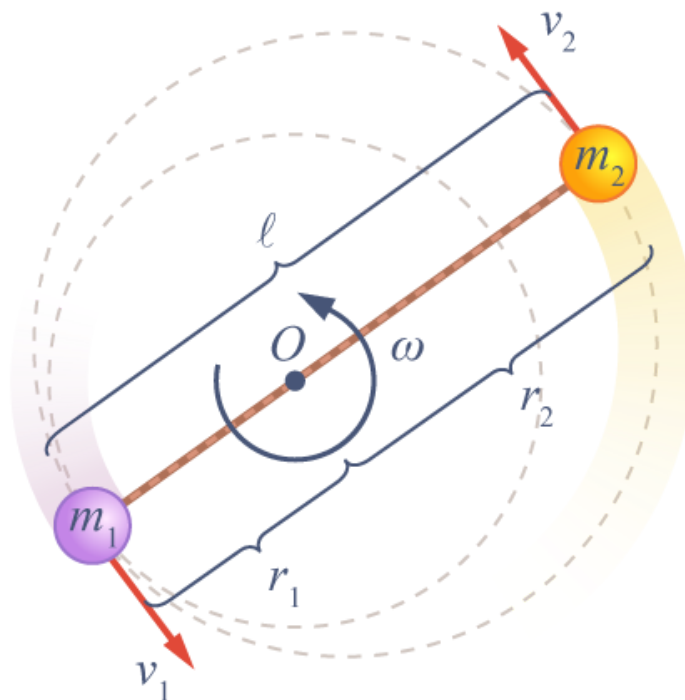
ตอบ $Mg\alpha R(t_1 - t_o)$



จุด CM ของมวล M จะสูงขึ้นเท่ากับ ΔR ที่มีรัศมีของมันเพิ่มขึ้น
 จากอุณหภูมิ $\Delta T = t_1 - t_0$ เพิ่มขึ้น
 $\Delta R = \alpha R(t_1 - t_0) \rightarrow \Delta E_P = Mg\Delta R$
 $\therefore$ พลังงานศักย์เพิ่มขึ้น $Mg\alpha R(t_1 - t_0)$

ข้อที่ 15

ตอบ ขนาดความเร็วสัมผัส = ωl



(จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของเส้นประวงกลมทั้งสอง แก้วรูปนิดหน่อย //ปลด)

ทั้ง m_1 และ m_2 จะหมุนรอบจุด CM (ไม่มีแรงลัพธ์ภายนอก ซึ่ง CM ต้องไม่มีความเร่ง, ไม่หมุนและต้องเป็นจุดหมุน)
 จะหา r_1 และ r_2 ได้:

$$r_1 + r_2 = l \quad (1)$$

$$r_1 m_1 = r_2 m_2 \quad (2)$$

$$r_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}$$

$$r_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}$$

ความเร็วเชิงเส้นของทั้ง 2 หาจาก

$$v_1 = \omega r_1$$

$$v_2 = \omega r_2$$

เนื่องจากทั้ง 2 ร็องสวนกัน

$$\therefore v_{rela} = v_1 + v_2 = \omega l$$

ข้อที่ 16

1) จาก นิยามของ v_{cm} จะได้

$$v_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i}$$

โมเมนตัมรวมของระบบเทียบจุดศูนย์กลางมวล คือ

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i (v - v_{cm}) i$$

จึงได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i - \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_{cm} = 0$$

2) พลังงานจลน์ของระบบคือ

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i (v_{cm} + v_{i,cm})^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_{i,cm}^2$$

ใช้ผลจากข้อที่แล้วร่วมด้วย เพื่อตัดพจน์ตรงกลางทิ้งไป

$$\therefore KE_{system} = KE_{cm} + KE_{around cm}$$

ข้อที่ 17

4.1 จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม(ในแนวแกน X) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
M_1 &= M_2 \\
0 &= MV - m(\dot{\theta} R \cos \theta - V) \\
V &= \frac{m\dot{\theta} R \cos \theta}{M + m}
\end{aligned}$$

4.2 จากกฎการอนุรักษ์พลังงาน จะได้ว่า

$$E_1 = E_2$$

$$\begin{aligned}
mga &= mga \cos \theta + \frac{1}{2}MV + \frac{1}{2}m(v \cos \theta - V)^2 + \frac{1}{2}m(v \sin \theta)^2 \\
2mga(1 - \cos \theta) &= MV^2 + m(v^2 \cos^2 \theta - 2vV \cos \theta + V^2) + m(v^2 \sin^2 \theta) \\
2mga(1 - \cos \theta) &= V^2(M + m) - 2mvV \cos \theta + mv^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\
2mga(1 - \cos \theta) &= \left(\frac{m\dot{\theta} a \cos \theta}{M + m} \right)^2 (M + m) - 2m(\dot{\theta} a) \left(\frac{m\dot{\theta} a \cos \theta}{M + m} \right)^2 \cos \theta + V^2 + m(\dot{\theta} a)^2 \\
2mga(1 - \cos \theta) &= \left[\frac{(m\dot{\theta} a \cos \theta)^2}{M + m} \right] \dot{\theta}^2 - 2 \left[\frac{(m\dot{\theta} a \cos \theta)^2}{M + m} \right] \dot{\theta}^2 + ma^2 \dot{\theta}^2 \\
2g(1 - \cos \theta) &= \left[a - \frac{ma \cos^2 \theta}{M + m} \right] \dot{\theta}^2 \\
2g(1 - \cos \theta) &= \left[\frac{M + m(1 - \cos \theta)^2}{M + m} \right] a \dot{\theta}^2
\end{aligned}$$

4.3

$$\theta = \arccos \left[\frac{2(M + m)}{2(M + m) + M} \right]$$