เฉลยชุดข้อสอบ : ฮาร์มอนิคอย่างง่าย ชุดที่ 2

ข้อที่ 1

ตอบ $\dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{1}{2}\alpha\Delta\theta$

จากโจทย์ ได้

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}$$
$$T + \Delta T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1 + \Delta\ell}{g}}$$

จาก ข. ได้

$$\alpha = \frac{\Delta\ell}{\ell_1\Delta\theta}$$
$$\Delta\ell = \alpha\ell_1\Delta\theta$$

จาก ค. ได้

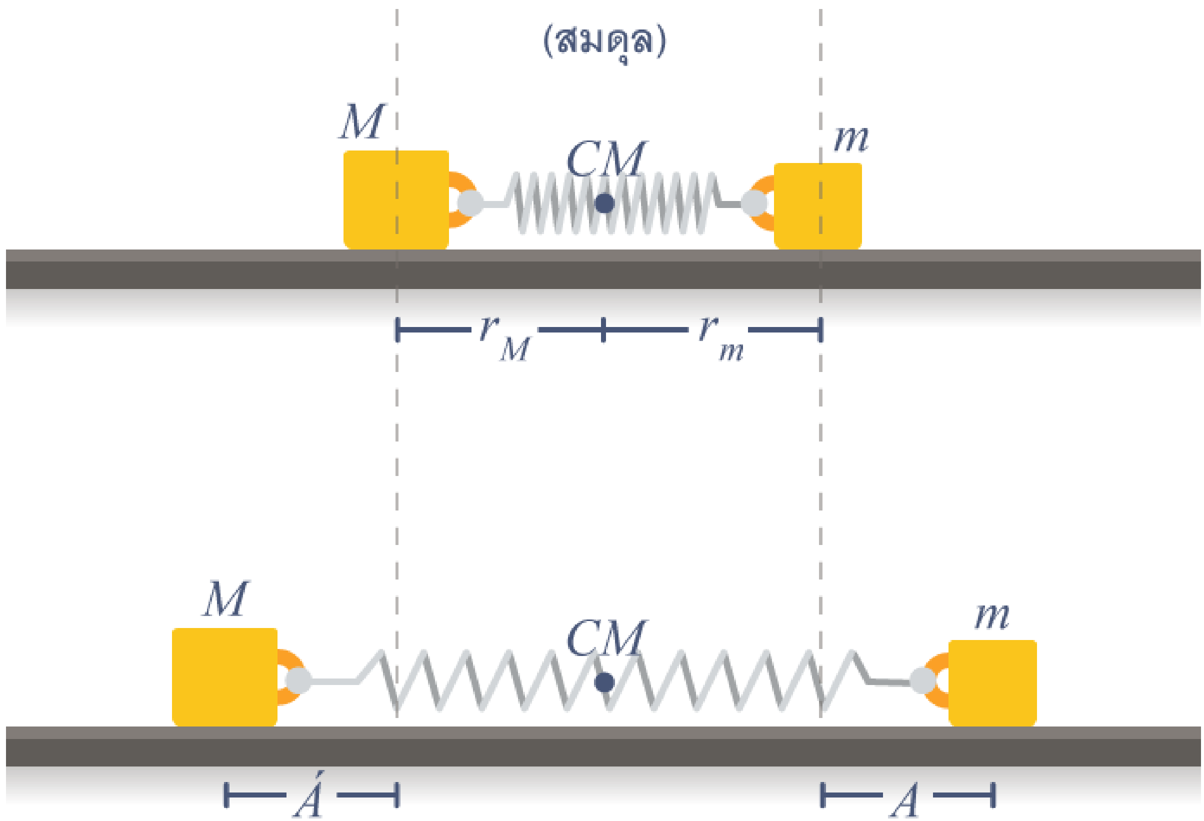
$$\begin{aligned}\sqrt{\ell_1 + \Delta\ell} &= \sqrt{\ell_1 + \alpha\ell_1\Delta\theta} \\ &\approx \sqrt{\ell_1}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\Delta\theta\right)\end{aligned}$$

แทนค่าผลจาก ข. และ ค. ลงใน $T + \Delta T$ จะได้

$$T + \Delta T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\cdot\sqrt{\ell_1}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\Delta\theta\right)$$
$$\Delta T \approx 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}\frac{\alpha}{2}\Delta\theta$$
$$\therefore \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\alpha\Delta\theta$$

ข้อที่ 2

ตอบ $\dfrac{m}{M}A$



เนื่องจากไม่มีแรงภายนอกกระทำจุด CM ของระบบต้องไม่มีความเร่ง (ในที่นี้ คือ "อยู่กับที่" ไปเลย) ดังนั้นไม่ว่า M, m จะพยายามเคลื่อนที่ออกจากสมดุลอย่างไร จุด CM ของมันจะอยู่ที่เดิม :

ที่สมดุล

$$r_M M = r_m m$$

เมื่อขยับไปที่ Amplitude

$$(r_M + \acute{A})M = (r_m + A)m$$

จะได้

$$\acute{A}M = Am \rightarrow \acute{A}(\text{Amplitude ของ M}) = \text{A}\frac{\text{m}}{\text{M}}$$

ข้อที่ 3

ตอบ $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}\frac{N}{N+n}}$

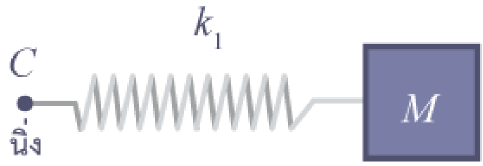
เนื่องจากสปริงทั้งเส้น สามารถมองว่าเป็นสปริง 2 ส่วน Nวง $+$ nวง ต่ออนุกรมกันได้ เรารู้ว่าค่า K สปริงของวงเล็ก ๆ $(1$ วง$)$ หาได้จาก

$$\frac{1}{k} = (N+n)\frac{1}{K}$$

$$K = (N+n)k$$

และสำหรับสปริงแค่ N วง

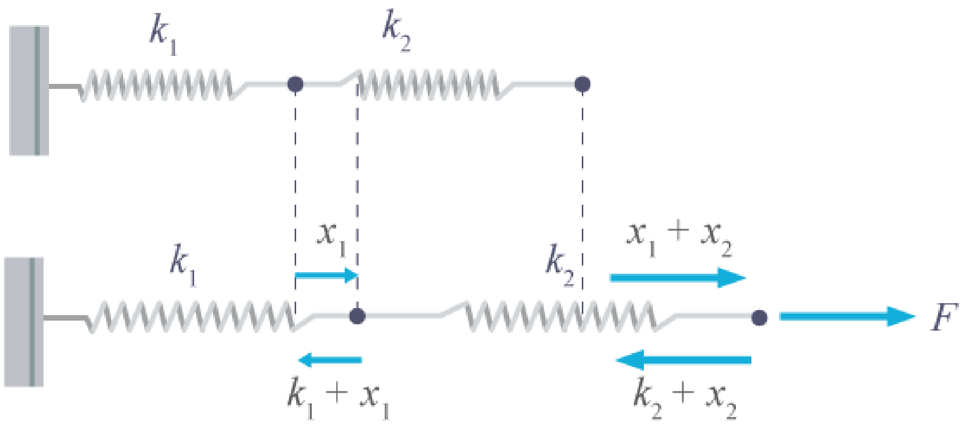
$$k_1 = \frac{K}{N} = \left(1 + \frac{n}{N}\right) \times k$$



คือมองแค่ว่า M เคลื่อนที่แบบ SHM โดยมีสปริงแข็ง K ยึดกับจุด C (ซึ่งไม่นิ่ง) คาบการสั่น คือ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}\left(1+\frac{n}{N}\right)^{\frac{1}{2}}$$

NOTE : การต่ออนุกรมสปริง



มองว่า F ดึง k_eq ตัวเดียวจนยืดออกมา $x_1 + x_2$ ซึ่งแรง F นี้ ถ่ายทอดไปตามสปริงเบาทั้งเส้นเท่ากัน

$$\begin{aligned} x_{eq} &= x_1 + x_2 \\ F/k_{eq} &= F/k_1 + F/k_2 \\ \therefore 1/k_{eq} &= 1/k_1 + 1/k_2 \end{aligned}$$

ข้อที่ 4

กำหนดให้ ทิศไปทางขวาเป็นบวก
ℓ คือ ความยาวธรรมชาติของสปริง
k คือ ค่าคงตัวสปริง
$x_1,\ x_2,\ x_3$ คือ ระยะที่ m ตัวที่ $1,\ 2,\ 3$ เคลื่อนที่ตามแนวแกน X ขณะที่สริงทั้งสองยืดออก ตามลำดับ
สปริงตัวแรกจะยืดออกเท่ากับ

$$x_2 - x_1 - \ell$$

ระยะที่สปริงตัวตัวที่สองยืดออกเท่ากับ

$$x_3 - x_2\ell$$

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน

$$\sum \vec{F} = ma$$

สำหรับ m ตัวแรกถูกสปริงตัวแรกดึงไปทางขวา จะได้

$$m\ddot{x_1} = +k(x_2 - x_1 - \ell)\ \ldots(1)$$

สำหรับ m ตัวที่สองถูกสปริงตัวแรกดึงไปทางซ้ายและถูกสปริงตัวที่สองดึงไปทางขวา จะได้

$$m\ddot{x_2} = +k(x_3 - x_2 - \ell) - k(x_2 - x_1 - \ell) \ \ldots(2)$$

สำหรับ m ตัวที่สามถูกสปริงตัวที่สองดึงไปทางซ้าย จะได้

$$m\ddot{x_3} = -k(x_3 - x_2 - \ell) \ \ldots(3)$$

เราสามารถแก้สมการได้โดย
นำ $(3) - (1)$

$$\begin{aligned} m(\ddot{x_3} - \ddot{x_1}) &= -k(x_3 - x_1 - 2\ell) \\ m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_3 - x_1) &= -k(x_3 - x_1 - 2\ell) \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_3 - x_1 - 2\ell) &= -\frac{k}{m}(x_3 - x_1 - 2\ell) \\ \therefore \omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ความถี่พื้นฐานตัวแรก เท่ากับ

$$f_1 = \frac{m_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

นำ $(3) - 2(2) + (1)$

$$\begin{aligned} m(\ddot{x_3} - 2\ddot{x_2} + \ddot{x_1}) &= -3k(x_3 - 2x_2 + x_1) \\ m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_3 - 2x_2 + x_1) &= -3k(x_3 - 2x_2 + x_1) \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_3 - 2x_2 + x_1) &= -\frac{3k}{m}(x_3 - 2x_2 + x_1) \\ \therefore \omega_2 &= \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น สำหรับ ความถี่พื้นฐานตัวที่สอง เท่ากับ

$$f_2 = \frac{w_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

เพิ่มเติม
ความถี่ใน ที่นี้ คือความถี่ธรรมชาติของ mode การสั่น mode หนึ่ง ซึ่งมีความเป็นไปได้ว่า ในความจริงแล้ว มวลทั้งหมดมันจะสั่นหลาย mode ผสมกัน ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขตั้งต้นที่กำหนดให้แต่ละตัว
การสั่นของมวลแต่ละก้อนเกิดจากผลรวมของทุก normal mode นั่นคือ เราสมมติว่า

$$x = A_1 e^{i\omega 1 t} + A_2 e^{i\omega 1 t} + \ldots + A_3 e^{i\omega 1 t}$$

ข้อที่ 5

ขั้นแรก : คิดเมื่อทั้งระบบอยู่ที่สมดุล ให้สปริงยืดจากความยาวธรรมชาติ x ให้จุดศูนย์กลางทรงกระบอกเป็นจุดหมุน

$$\begin{aligned} \because \sum \tau &= 0 \\ kx(\frac{R}{2}) &= mgR \\ \therefore kx &= 2mg \end{aligned}$$

....
ขั้นสอง : คิดเมื่อดึงมวล m ลงมาเป็นมุมเล็กๆ θ และ ยาวจากระยะสมดุลในขั้นแรกเป็น A (ยืดจากความยาวธรรมชาติ $x + A$)
ดังนั้น เราจึงประมาณได้ว่า

$$\tan\theta \approx \theta = \frac{A}{R/2}$$
$$A = \frac{\theta R}{2}$$
$$\because \sum \tau = I\ddot{\theta}$$
$$mgR - k(x+A)\frac{R}{2} = (\frac{1}{2}MR^2 + mR^2)\ddot{\theta}$$
$$mg - mg - \frac{k\theta R}{4} = (\frac{1}{2}MR + mR)\ddot{\theta}$$
$$-k\theta = (2M+4m)\theta$$
$$\ddot{\theta} = \frac{k}{(2M+4m)}\theta$$
$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{k}{2M+4m}\theta$$
$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{2(M+2m)}{k}}$$

ข้อที่ 6

ให้เชือกมีความตึง T และวัตถุสมดุลจะได้ว่า

$$T\sin\theta = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$
$$T\cos\theta = mg$$
$$\tan\theta = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2 mg}$$

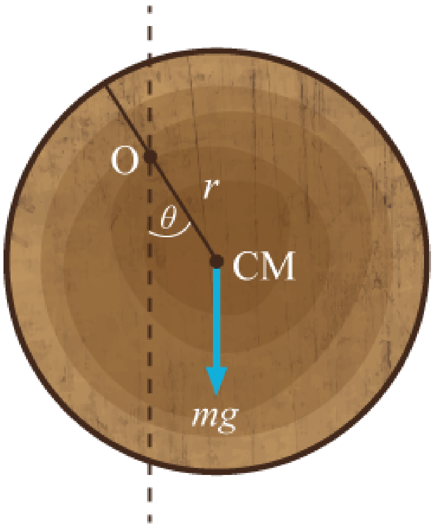
จาก

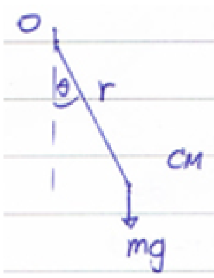
$$\tan\theta \approx \sin\theta$$
$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2 mg} \approx \frac{x}{2L}$$

ได้ว่า

$$x = 2L\left(\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 L^2 mg}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ข้อที่ 7





ให้ m เป็นมวลของแผ่นกลม
r เป็นระยะทางจากจุด O ถึงจุด CM

$$-mgr\sin\theta = \left(\frac{1}{2}mR^2 + mr^2\right)\ddot{\theta}$$

โดย $\sin\theta = \theta$ เมื่อ θ เล็กมากๆ
จะได้

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{-mgr}{\frac{1}{2}mR^2 + mr^2}\theta \\ &= \frac{-gr}{\frac{1}{2}R^2 + r^2}\theta\end{aligned}$$

คาบของการแกว่ง

$$\begin{aligned}T &= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}R^2 + r^2}{gr}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{R^2}{2r} + r}\end{aligned}$$

สังเกตว่าคาบจะน้อยสุดเมื่อ $\dfrac{R^2}{2r} + r$ มีค่าน้อยสุด
หาค่า r จาก

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{R^2}{2r} + r\right) &= 0 \\ \frac{R^2}{2}(-1)r^{-2} + 1 &= 0 \\ 1 &= \frac{R^2}{2r^2} \\ r &= \frac{R}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

ทดสอบว่า $r = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ เป็นค่าที่ทำให้ $\dfrac{R^2}{2r} + r$ มีค่าน้อยสุด

โดยการหาอนุพันธ์อันดับสองของ $\dfrac{R^2}{2r} + r$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left(\frac{R^2}{2r} + r\right) = \frac{R^2}{r^3}$$

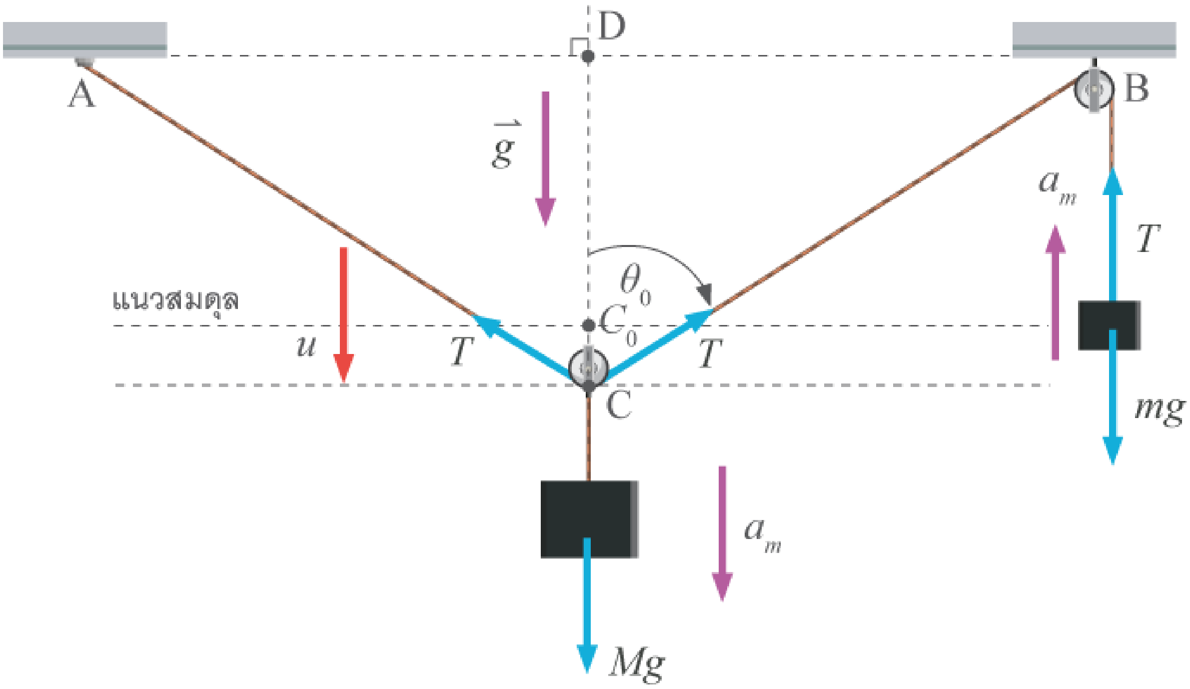
มีค่าเป็นบวก แสดงว่า $r = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ ให้ค่าน้อยสุดจริง

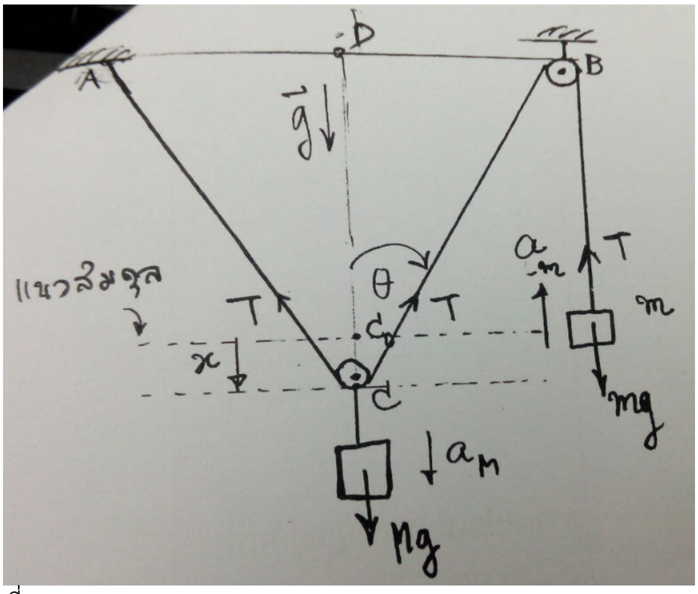
ดังนั้น คาบจะน้อยสุดเมื่อ $r = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

$$T_{\min} = 2^{\frac{5}{4}}\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

ข้อที่ 8

ตอบ $T = 2\pi\left(\dfrac{Ml}{2mg\sin^2\theta_0}\right)^{\dfrac{1}{2}}$





ที่สมดุล

$$\theta=\theta_0, DC_0=l\cos\theta_0, T_0=mg$$

และ

$$Mg=2T_0\cos\theta_0$$

$$\because Mg=2mg\cos\theta_0$$

เขียน equation of motion ของมวล M ได้

$$Ma_M=Mg-2T\cos\theta$$

ของ m ได้

$$ma_n=T-mg$$

ถ้าสมมติว่า

$$x\ll l\rightarrow a\ll g\rightarrow T\approx mg$$

ได้

$$Ma_M\approx Mg-2mg\cos\theta$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}(BC)^2&=(l\cos\theta_0+x)^2+(DB)^2\\&=(l\cos\theta_0)^2+(DB)^2+(2l\cos\theta_0)x\\&=l^2+(2l\cos\theta_0)x\\&=l^2\left(1+\frac{2\cos\theta_0 x}{l}\right)\\\because BC&\approx l\left(1+\frac{2\cos\theta_0 x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\\&\approx l+\cos\theta_0 x\end{aligned}$$

$;(1+\alpha)^n\approx 1+n\alpha$ เมื่อ $\alpha\ll 1$

และ

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{DC}{BC} \\
&\approx \frac{l\cos\theta_0 + x}{l+\cos\theta_0 x} \\
&\approx (\cos\theta_0)\left(1+\frac{x}{l\cos\theta_0}\right)\left(1-\frac{\cos\theta_0 x}{l}\right) \\
&\approx (\cos\theta_0)\left(1+\frac{x}{l\cos\theta_0}-\frac{x\cos\theta_0}{l}-\frac{x^2}{l^2}\right) \\
&\approx (\cos\theta_0)\left(1+\frac{x\sin^2\theta_0}{l\cos\theta_0}\right)
\end{aligned}
$$

ได้

$$
\begin{aligned}
Ma_M &\approx Mg - 2mg\left((\cos\theta_0)\left(1+\frac{x\sin^2\theta_0}{l\cos\theta_0}\right)\right) \\
M\frac{d^2x}{dt^2} &\approx -\frac{2mg\sin^2\theta_0}{l}x
\end{aligned}
$$

$\therefore$ คาบการสั่น

$$
T = 2\pi\left(\frac{Ml}{2mg\sin^2\theta_0}\right)^{\frac{1}{2}}
$$

ข้อที่ 9

1) จากกฎการอนุรักษ์พลังงานจะได้ว่า

$$
mg(h+1) = \frac{1}{2}kx^2 + mg(l-x)
$$

เมื่อ x คือระยะที่หดมากสุดของสปริงนี้
แก้สมการแล้วใช้ค่าบวก (สปริงไม่ทะลุพื้นลงไป) ได้

$$
x = \frac{mg}{k} + \frac{\sqrt{m^2g^2+2mghk}}{k}
$$

2) พอสมดุลแล้วจะได้ว่า $k\psi = mg$ หรือ $\psi = \frac{mg}{k}$ ดังนั้นตำแหน่งสมดุลสูงจากพื้น $l - \dfrac{mg}{k}$

3) โจทย์กำหนดว่า มวลจะติดอยู่กับปลายสปริงตลอดดังนั้น ให้ H เป็นความสูงสูงสุดที่ขึ้นไปได้ จากกฎการอนุรักษ์พลังงานได้ว่า แก้สมการแล้วพิจารณาค่าบวกได้ว่า

$$
\begin{aligned}
mg(h+l) &= mgH + \frac{1}{2}k(H-1)^2 \\
H &= l - \frac{mg}{k} + \frac{\sqrt{m^2g^2+2mghk}}{k}
\end{aligned}
$$

4) วัตถุจะมีอัตราเร็วสูงสุดเมื่อผ่านจุดสมดุล จากกฎการอนุรักษ์พลังงานจึงได้ว่า

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 + \frac{1}{2}k(\frac{mg}{k})^2 + mg(l - \frac{mg}{k}) = mg(h+1)$$
$$v_{max} = \sqrt{\frac{mg^2}{k} + 2gh}$$

5) จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน เมื่อวัตถุอยู่สูง y จากตำแหน่งสมดุล จะได้ว่า

$$-k(y - \frac{mg}{k}) - mg = m\frac{d^2}{dt^2}y$$
$$\frac{d^2}{dt^2}y = -\left(\frac{k}{m}\right)y$$

จาก สมการด้านบน จะเห็นว่าความเร่งแปรผันตรงกับการกระจัดแต่มีทิศทางตรงข้าม เป็นเงื่อนไขของ SHM ดังนั้นนี่เป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ได้คำตอบของสมการเป็น

$$y = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$$

พิจารณาว่าที่ $t = 0$ จะพบว่า

$$y = \frac{mg}{k}$$

และ

$$v = \frac{d}{dt}y = \sqrt{2gh}$$

(จากกฎการอนุรักษ์พลังงาน) จะได้ว่า

$$A = \frac{\sqrt{m^2g^2 + 2mghk}}{k}$$

และ

$$\phi = \arcsin\left(\frac{mg}{\sqrt{m^2g^2 + 2mghk}}\right)$$

ดังนั้นตำแหน่ง y ที่เวลาใดๆเป็นไปตามสมการ

$$y(t) = \left[\frac{\sqrt{m^2g^2 + 2mghk}}{k}\right]\sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}t + \arcsin\left(\frac{mg}{\sqrt{m^2g^2 + 2mghk}}\right)\right]$$

6) การสั่นนี้มีคาบ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$